第28卷 第3期 1989年

中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.28 №.3 1989

·研究简报·

Bland避免循环的单纯形方法的改进

周勤学 丘兆福

（数学系）

摘 要

对Bland避免循环的单纯形方法作了改进，使在求解线性规划问题时既能避免出现循环，又使目标函数值改善较快，减少了迭代次数。

关键词 单纯形方法，循环，选基规划

单纯形方法至今仍是求解线性规划问题的最有效方法。但一般单纯形方法只适用于非退化的线性规划问题，用于退化问题时，可能会出现循环而失效。R.G.Bland于1976年提出的避免循环的方法，虽然能有效地避免循环，但执行起来存在或牵涉过多的计算，或使目标函数值改善较慢等。本文对Bland方法作了一些改进。保留其避免出现循环的优点，扬弃了使目标函数值改善可能较慢的缺点。本方法的特点是：在进行迭代时，在当前迭代点的所有邻近极点中，选取目标函数值最好的极点作为下一迭代点。

由于各种避免循环的单纯形方法与一般单纯形方法比较，仅在于选取入基变量和离基变量的规则（以下简称为选基规则）不同，其余步骤基本一样。因此，下面只讨论改进方法的选基规则。

选基规则 在用单纯形方法对线性规划问题

$$\min Z = C^T x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \tag{LP}$$

进行迭代时，设当前可行基B所对应的典式为

$$\begin{aligned} x_i &= \alpha_i - \sum_{j \bar{\in} B} \beta_{ij} x_j \\ Z &= Z_0 - \sum_{j \bar{\in} B} \lambda_j x_j \end{aligned} \tag{1}$$

若有正的检验数，则按公式

$$S = \min\left\{ k : \lambda_k \theta_k = \max\left\{ \lambda_j \theta_j : \lambda_j > 0,\ \theta_j = \min\left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_{ij}} : \beta_{ij} > 0 \right\}\right\}\right\} \tag{2}$$

选取x_s为入基变量，和按公式

文本1988年11月29日收到

$$r=\min\left\{l:\frac{\alpha_l}{\beta_{ls}}=\min\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{is}}:\beta_{is}>0\right\}\right\} \quad (3)$$

选取x_r为离基变量。

定理 用单纯形方法对线性规划问题(LP)进行迭代时，按照上述选基规则选取入基变量和离基变量，可避免出现循环，并在每次迭代中使目标函数值下降尽可能快。

该定理的证明借助于Bland方法的有关结果，现将其以引理的形式叙述如下

引理 在用单纯形方法对问题(LP)进行迭代时，若有几个正的检验数，则按公式

$$S=\min\{j:\lambda_j>0\} \quad (4)$$

选取x_s为入基变量和按公式(3)选取x_r为离基变量，不会出现循环。

引理的证明详见文[1]。

定理的证明 在用单纯形方法对线性规划问题(LP)进行迭代时，对于任一迭代子过程

$$B_0\to B_1\to B_2\to\cdots\to B_p, \quad \text{(SP)}$$

其中B_t($t=0,1,2,\cdots,p$)为问题(LP)的可行基。令W_t表示对应于可行基B_t的由公式(2)确定的$\lambda_s\theta_s$的值。显然，只要有任一$W_t>0$，则迭代子过程(SP)不可能是一循环过程，即B_0与B_p不会相同。

现设所有的$W_t=0$，$t=0,1,2,\cdots,p$。由于在$W_t=0$时，公式(2)与公式(4)等价，而由引理可知，迭代子过程(SP)也不可能是一循环过程。

综上可知，在用单纯形方法进行迭代时，遵循该选基规则可避免出现循环。

再由典式(1)不难看出，若$\lambda_j>0, j\bar{\in}B$，选取x_j为入基变量，而按公式(3)选取x_r为离基变量进行换基迭代时，可使目标函数值下降

$$\triangle Z_j=\lambda_j\theta_j,\ \lambda>0,\quad \theta_j=\min\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{ij}}:\beta_{ij}>0\right\}$$

故根据公式(2)和(3)可知，按照该选基规则进行换基迭代，可使目标函数值下降尽可能快，即有

$$\triangle Z_s=\max\left\{\triangle Z_j=\lambda_j\theta_j:\lambda_j>0,\theta_j=\min\left\{\frac{\alpha_i}{\beta_{ij}}:\beta_{ij}>0\right\}\right\}$$ 证毕。

下面以著名的E·Beale的例子为例，比较按几种选基规则来选取入基变量和离基变量时的迭代次数。

例 求解线性规则问题

$$\min Z=-\frac{3}{4}x_1+150x_2-\frac{1}{50}x_3+6x_4$$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}x_1-60x_2-\frac{1}{25}x_3+9x_4+x_5=0\\ \frac{1}{2}x_1-90x_2-\frac{1}{50}x_3+3x_4+x_6=0\\ x_3+x_7=1\\ x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,7\end{cases}$$

若按照一般单纯形方法从初始可行基$B_0=(x_5, x_6, x_7)$出发进行换基迭代，经过6次迭代后又回到初始可行基B_0上。出现了循环，无法求得最优解。

若按照Bland方法从同一初始可行基B_0出发进行换基迭代，经过6次迭代后可得到该问题的最优解$x^*=(\frac{1}{25}, 0, 1, 0, \frac{3}{100}, 0, 0)^T$，避免了循环。而用本文所介绍的改进方法，从同上相同的初始可行基B_0出发进行换基迭代，经2次迭代便可得到最优解x^*。不仅避免了循环，而且减少了迭代次数。

参考文献

〔1〕Bland R G, *Math. Oper. Res.*, 1977, 2

The Modification of Simplex Method of Bland's Avoidable Cycling

*Zhou Qinxue**　*Qiu Zhaofu*

Abstract

This paper is devoted to modify the simplex method of Bland's avoidable cycling so that the values of objective function are quickly improved and also the number of iterative steps is decreased with the cycling avoided in solving the L.P. problems.

Keywords simplex method, cycling, rule of selection of the basis

* Department of Mathematics