中山大学学报（自然科学版）
第28卷 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28
第1期，1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI №.1(1989)

非线性本征值问题的正解*

艾 军 朱熹平
（数学系）

摘 要

研究一类非线性椭圆型方程的本征值问题，在非线性项可以临界增长的条件下证明其正解的存在性，并在适当条件下证明了这类本征值问题至少存在两个正解。

关键词 本征值问题，正解，变分方法

本文考虑如下非线性本征值问题

$$\begin{cases} -\Delta u=\lambda f(u) & x\in\Omega \\ u>0 & x\in\Omega \\ u=0 & x\in\partial\Omega \end{cases} \qquad (\mathrm{I}_\lambda)$$

其中Ω是R^n中有界光滑区域，f是定义在$[0,+\infty)$上的局部 Lipschitz 连续函数且满足条件：

(f_1) $f(t)>0$，$t\geqslant0$

(f_2) $|f(t)|\leqslant c_1t^{\frac{n+2}{n-2}}+c_2$，$c_1$和$c_2$是正的常数

(f_3) 存在 $\theta\in[0,\frac{1}{2})$和$u_0\geqslant0$，使当$u\geqslant u_0$时，$0<\int_0^u f(t)dt\leqslant\theta uf(u)$

定理 1 若f满足条件(f_1)—(f_3)，则存在$\lambda^*>0$，使得

(i) $0<\lambda<\lambda^*$ 时，非线性本征值问题(I_λ)存在最小正解u_λ。

(ii) $\lambda>\lambda^*$ 时，非线性本征值问题(I_λ)不存在正解。

为证明定理 1，需要如下引理。

引理 1 (Ambrosetti—Rabinowitz) 设Φ是Banach 空间E上的c^1泛函，若有常数$\rho>0$和σ，使得(i) $\Phi(0)<\sigma$，(ii) 对所有$u\in\partial B_\rho$，有$\Phi(u)\geqslant\sigma$，(iii) 存在 $e\notin B_\rho$，使得$\Phi(e)<\sigma$，记

本文1987年5月4日收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

$$c=\inf_{\omega\in\Gamma}\max_{u\in\omega}\Phi(u)\geqslant\sigma$$

其中Γ是连接0和e的所有连续路径的集合，B_ρ是以0为心，ρ为半径的球。

则存在序列$\{u_j\}\subset E$，使得$\Phi(u_j)\to c$且$\Phi'(u_j)\to 0$ 在E^*中。

引理 1 证明与文〔5〕中山路引理证法相同，从略。

考虑非线性本征值问题(I_λ)所对应的变分泛函

$$\Phi_\lambda(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\lambda\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x \tag{1}$$

引理 2 若f局部Lipschitz 连续且满足条件(f_3)，则存在$\lambda_0>0$，使得由（1）定义的泛函Φ_{λ_0}满足引理 1 中全部条件。

证明 因为$\Phi_\lambda(0)=0$，且由f局部Lip连续，当u充分小时有

$$\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\leqslant\frac{L}{2}u^2+uf(0),\ L>0\text{ 是}Lip\text{ 常数}$$

记λ_1为$-\Delta$在零边界条件下的第一本征值，则

$$\Phi_\lambda(u)=\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\lambda\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda L)\int_\Omega u^2\mathrm{d}x-\lambda f(0)\int_\Omega u\mathrm{d}x$$

取λ_0适合，$0<\lambda_0\leqslant\min\left[(\lambda_1/2L),\ (\lambda_1\int_\Omega u^2\mathrm{d}x)/(8f(0)\int_\Omega u\mathrm{d}x)\right]$

则 $$\Phi_{\lambda_0}(u)\geqslant\frac{1}{8}\lambda_1\|u\|^2_{L^2}$$

故易选取σ和球B_ρ，使泛函$\Phi_{\lambda_0}(u)$满足引理 1 中条件(i)和(ii)。为证$\Phi_{\lambda_0}(u)$满足条件(iii)，由f满足的条件(f_3)蕴含超线性条件$\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t}=+\infty$，故对任意$M>0$，存在$t_0>0$，当$t>t_0$时，有$f(t)\geqslant Mt$，取$u_0\not\equiv 0$，则当$t>0$时，可算出估计式

$$\Phi_{\lambda_0}(tu_0)\leqslant\frac{t^2}{2}\left(\|\nabla u_0\|^2_{L^2}-\frac{\lambda_0 M}{2}\|u_0\|^2_{L^2}\right)-c(t_0,\ \lambda_0,\ M)$$

其中$c(t_0,\ \lambda_0,\ M)$是与t_0，λ_0，M有关的常数。取M足够大，则当$t\to+\infty$时，$\Phi_{\lambda_0}(tu_0)\to-\infty$，知$\Phi_{\lambda_0}(u)$满足引理 1 中条件(iii)。

引理 3 若f局部Lip连续，且满足条件(f_1)—(f_3)，则存在$\lambda_0>0$，使得非线性本征值问题(I_{λ_0})存在正解。

证明 由引理 2，存在$\lambda_0>0$，使得泛函$\Phi_{\lambda_0}(u)$满足引理 1 中全部条件。由引理 1，取$E=H^1_0(\Omega)$，则存在$\{u_k\}\subset H^1_0(\Omega)$，使当$k\to\infty$时，

$$\Phi_{\lambda_0}(u_k)\to c_0=\inf_{\omega\in\Gamma}\max_{v\in\omega}\Phi_{\lambda_0}(v)\geqslant\sigma>0$$

其中Γ是连接 0 和e的所有路径的集合。且有

$$\Phi'_{\lambda_0}(u_k)\to 0\text{ 在}(H^1_0(\Omega))^*\text{中}$$

即 $$\int_\Omega\left[\frac{1}{2}|\nabla u_k|^2-\lambda_0\int_0^{u_k}f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=c_0+o(1) \tag{2}$$

$$-\Delta u_k-\lambda_0 f(u_k)=\zeta_k\to 0 \quad 在(H_0^1(\Omega))^* 中 \tag{3}$$

用u_k乘以（3）式再在Ω上积分，得

$$\int_\Omega [|\nabla u_k|^2-\lambda_0 f(u_k)u_k]\mathrm{d}x=\int_\Omega \zeta_k u_k \mathrm{d}x \tag{4}$$

由（2）和（4）可得

$$\int_\Omega \left[\frac{\lambda_0}{2}f(u_k)u_k-\lambda_0\int_0^{u_k} f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=c_0-\frac{1}{2}\int_\Omega \zeta_k u_k \mathrm{d}x+o(1)$$

利用上式和f满足条件(f_3)知存在常数a和b，使得

$$\lambda_0\int_\Omega \left(\int_0^{u_k} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant a+b\|\zeta_k\|_{(H_0^1(\Omega))^*}\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)}$$

由（3）式，对任意$\varepsilon>0$，有常数c，使

$$\lambda_0\int_\Omega \left(\int_0^{u_k} f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\leqslant c+\varepsilon\|u_k\|_{H_0^1}$$

代回（2）式，知$\{u_k\}$在$H_0^1(\Omega)$中有界，因此有子列，不妨仍记为$\{u_k\}$，和$u\in H_0^1(\Omega)$，使得

$u_k\rightharpoonup u$ 在 $H_0^1(\Omega)$中弱收敛，$u_k\to u$ 在 $L^q(\Omega)$，$\left(1\leqslant q<\frac{2n}{n-2}\right)$ 中强收敛

$u_k\to u$ 在Ω上几乎处处收敛，$f(u_k)\rightharpoonup f(u)$ 在$(L^{p+1}(\Omega))^*$中弱收敛，$p=\frac{n+2}{n-2}$

在（3）式中取极限，得

$$-\Delta u=\lambda_0 f(u) \quad 在(H_0^1(\Omega))^* 中$$

由$f(u)>0$和极值原理，知$u\geqslant 0$，$u\not\equiv 0$。且由Breis-Kato[5]的正则性结果和Agmann正则化定理，知$u\in c^2(\bar\Omega)$。

定理1的证明 记$Q_\lambda=\{0\leqslant\lambda<+\infty\,|\,本征值问题(\mathrm{I}_\lambda)有正解\}$

对任意$\lambda_0\in Q_\lambda$，即本征值问题(I_{λ_0})有正解v_{λ_0}。当$0<\lambda<\lambda_0$时，由$u\equiv 0$总是(I_λ)的下解，而由

$$-\Delta v_{\lambda_0}=\lambda_0 f(v_{\lambda_0})=\lambda f(v_{\lambda_0})+(\lambda_0-\lambda)f(v_{\lambda_0})\geqslant\lambda f(v_{\lambda_0})$$

知v_{λ_0}是本征值问题(I_λ)的上解。由Amann[6]的结果，本征值问题(I_λ)存在最小正解u_λ。若取$\lambda^*=\sup Q_\lambda$，则定理1得证。

采用蕴含条件(f_2)的如下条件则有定理2

$(f_2)'$ $\qquad \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{u^p}=\mu,\qquad p=\frac{n+2}{n-2}$

定理2 假定f局部Lip连续且满足条件(f_1)，$(f_2)'$和(f_3)，其中$\mu=0$，则(i)存在$\mu^*>0$，当$0<\lambda<\mu^*\leqslant\lambda^*$时，非线性本征值问题$(\mathrm{I}_\lambda)$至少存在另一正解$U_\lambda$。(ii)若$f$是凸函数，即$f''>0$，则当$0<\lambda<\lambda^*$时$(\mathrm{I}_\lambda)$至少存在另一正解。

证明 由定理1，当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时，(I_λ) 有最小正解 u_λ，要证 (I_λ) 另有形如 $U_\lambda=u_\lambda+v$ 的解，其中 v 满足

$$\begin{cases}-\Delta v=\lambda h(v) & x\in\Omega\\ v>0 & x\in\Omega\\ v=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{5}$$

$h(v)=f(u_\lambda+v)-f(u_\lambda)$

显然 $h(0)=0$ 且 h 也是局部Lip连续，故当 v 充分小时，有常数 $L=L(u_\lambda)$ 适合

$$|h(v)/v|\leqslant L$$

取 $\mu^*=\min\left(\frac{\lambda_1}{L},\ \lambda^*\right)$，则当 $0<\lambda<\mu^*\leqslant\lambda^*$ 时，

$$\lim_{v\to 0+}\frac{\lambda h(v)}{v}<\lambda_1\tag{6}$$

又由条件 $(f_2)'$ 且 $\mu=0$，知 h 满足

$$\lim_{v\to\infty}\frac{\lambda h(v)}{v^p}=0,\ p=\frac{n+2}{n-2}\tag{7}$$

由条件 (f_3) 蕴含的超线性条件，可证当 f 满足条件 (f_3) 时，$h(t)$ 也满足条件 (f_3)，故由条件（6）和（7）及文〔4〕，知（5）存在正解 $v\in c^2(\bar\Omega)$。因而 (I_λ) 存在异于 u_λ 的正解 U_λ。

由于条件（6）只是用于保证算子 $-\Delta-\lambda f'(u_\lambda)$ 的最小特征值是正的，为证结论(ii)，只需验证当 f 是凸函数时，对 $0<\lambda<\lambda^*$，算子 $-\Delta-\lambda f'(u_\lambda)$ 的最小特征值总是正的。

对 $0<\lambda<\lambda^*$，取 λ_0 适合 $\lambda<\lambda_0<\lambda^*$，由定理1，本征值问题 (I_λ) 和 (I_{λ_0}) 分别有最小正解 u_λ 和 u_{λ_0}，利用Taylor展式，可得

$$-\Delta(u_{\lambda_0}-u_\lambda)-\lambda f'(u_\lambda)(u_{\lambda_0}-u_\lambda)=(\lambda_0-\lambda)f(u_{\lambda_0})+\frac{\lambda}{2}f''(\zeta)(u_{\lambda_0}-u_\lambda)^2$$

由 $f(u)>0$，$u\geqslant 0$ 和 f 的凸性，有

$$-\Delta(u_{\lambda_0}-u_\lambda)-\lambda f'(u_\lambda)(u_{\lambda_0}-u_\lambda)>0$$

即算子 $-\Delta-\lambda f'(u_\lambda)$ 的最小特征值是正的[2]。当 f 是凸函数时，条件（6），（7）和 (f_3) 仍成立，故由文〔4〕结果，知（5）存在正解 $v\in c^2(\bar\Omega)$。

定理3 若 $f(t)=\mu t^p+g(t)$ 局部Lip连续，其中低阶微扰 $g(t)$ 单调不减，假定条件 (f_1)，$(f_2)'$ 和 (f_3) 成立，且 $\mu\neq 0$，则

(i) 存在 $\mu^*>0$，使得 $0<\lambda<\mu^*\leqslant\lambda^*$ 时，非线性本征值问题 (I_λ) 至少存在另一正解 U_λ；(ii) 若假定 f 是凸函数，则在 $0<\lambda<\lambda^*$ 上，(I_λ) 至少存在另一正解 U_λ。

证明 仍要证明在定理3条件下，非线性本征值问题 (I_λ) 存在形如 $U_\lambda=u_\lambda+v$ 的解，其中 v 满足如下本征值问题

$$\begin{cases}-\Delta v=\lambda\mu v^p+\lambda h(v) & x\in\Omega\\ v>0 & x\in\Omega\\ v=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{8}$$

$$h(v)=\mu(u_\lambda+v)^p-\mu u_\lambda^p-\mu v^p+g(u_\lambda+v)-g(u_\lambda),\quad p=\frac{n+2}{n-2}$$

记　　$w=(\lambda\mu)^{1/(p-1)}v$，则（8）可化为

$$\begin{cases}-\Delta w=w^p+H(w) & x\in\Omega\\ w>0 & x\in\Omega\\ w=0 & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{8}'$$

其中　　$H(w)=\frac{\lambda}{k}h(kw),\ \lambda\mu k^{p-1}=1$

（8）′已是文〔3〕讨论过的形式，我们只需验证它满足文〔3〕中正解存在的条件。

由 $h(o)=0$，知 $H(o)=0$，而由 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{g(t)}{t^p}=0$，显然有

$$\lim_{w\to+\infty}\frac{H(w)}{w^p}=0\tag{9}$$

因为g局部Lip连续，故当v充分小时存在常数 $L\equiv L(u_\lambda)$，使得

$$|[g(u_\lambda+v)-g(u_\lambda)]/v|\leqslant L$$

而当 $v\to0^+$时，有 $\{\lambda\mu[(u_\lambda+v)^p-u_\lambda^p-v^p]/v\}\longrightarrow\lambda\mu p u_\lambda^{p-1}$

所以当v充分小时，有 $[H(w)/w]\leqslant(\lambda/k)(\mu p u_\lambda^{p-1}+L)$

取　　$\mu^*=\min((k\lambda_1/(L+\mu p\|u_\lambda^{p-1}\|_{L^\infty})),\lambda^*)$

则当 $0<\lambda<\mu^*\leqslant\lambda^*$ 时，有

$$\lim_{w\to0+}\frac{H(w)}{w}<\lambda_1\tag{10}$$

(10)式蕴含算子$-\Delta-H'(0)$的最小特征值是正的。为证定理3(i)，我们要分别考虑 $n\geqslant5$，$n=4$、3 三种情形。

① $n\geqslant5$，当 $p>1$，$a>0$，$b>0$时，有不等式 $(a+b)^p-a^p-b^p>0$

由g单调不减，知 $H(w)\geqslant0$，对任意 $w\geqslant0$

所以　　$H(w)\geqslant\alpha>0$，对 $x\in\Omega'$，$w\in[1,2]$

其中Ω'是Ω内的任意区域。故由文〔3〕推论2.1知(8)有解。

② $n=4$ $(p=3)$，这时由 $h(v)=3\mu u_\lambda^2v+3\mu u_\lambda v^2+g(u_\lambda+v)-g(u_\lambda)\geqslant3\mu u_\lambda^2v$

可推出 $H(w)\geqslant3\lambda^2\mu u_\lambda^2w$，对所有$w\geqslant0$，故由文〔3〕推论2.2知（8）有解。

③ $n=3(p=5)$，这时

$$h(v)=5\mu u_\lambda v^4+10\mu u_\lambda^2v^3+10\mu u_\lambda^3v^2+5\mu u_\lambda^2v+g(u_\lambda+v)-g(u_\lambda)$$

故可推出 $H(w)\geqslant5\lambda^{5/4}\mu u_\lambda w^4$，对所有 $w\geqslant0$，由文〔3〕推论2.3知（8）有解。

综合三种情形，当μ^*充分小时，对于$0<\lambda<\mu^*\leqslant\lambda^*$，非线性本征值问题$(\mathrm{I}_\lambda)$至少存在一个不同于$u_\lambda$的正解 $U_\lambda=u_\lambda+v$。

当 f 是凸函数时，上面推导仍成立。由 $H(w)$定义，可得

$$H'(0)=\lambda h'(0)=\lambda[\mu p u_\lambda^{p-1}+g'(u_\lambda)]=\lambda f'(u_\lambda)$$

而定理2已证得，当 f 是凸函数时，算子 $-\Delta-\lambda f'(u_\lambda)$ 的最小特征值恒正，因而当 $0<\lambda<\lambda^*$ 时，算子 $-\Delta-H'(0)$ 的最小特征值恒正，（8）都有正解 v，即证得非线性本征值问题 (I_λ) 至少存在不同于 u_λ 的另一正解 $U_\lambda=u_\lambda+v$。定理3证毕。

参 考 文 献

〔1〕 M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz, *Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems*, Arch. Rational Mech. Anal., 58(1975), 207—218

〔2〕 P. L. Lions, *On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations*, SIAM Review, 24(1982), 441—467

〔3〕 H. Brezis and L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math., 36(1983), 437—477

〔4〕 马汝念等，中山大学学报（自然科学），论丛〔10〕，1987，1—13

〔5〕 H. Brezis and T. Kato, *Remarks on the Schrodinger operator with singular complex potential*, J. Math. Pures et Appl., 58(1979), 137—151

〔6〕 H. Amann, *Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space*, SIAM Review, 18 (1976), 620—709

Positive Solutions of Nonlinear Eigenvalue Problems

Ai Jun Zhu Xiping*

Abstract

This paper is concerncd with the existence of positive solutions for a class of semilinear elliptic eigenvalue problems involving critical Sobolev exponents. Under the assumption given in the paper for the nonlinear terms f(u), we proved that there exists a finite number $\lambda^*>0$, such that, there is a minimum positive solution for the eigenvalue problem when $0<\lambda<\lambda^*$, there is no positivs solution for the eigenvalue problem when $\lambda>\lambda^*$. If f(u) is a convex function, there exists at least another positive solution for the eigenvalue problem when $0<\lambda<\lambda^*$.

Keywords eigenvalue problem, positive solution, variational method

● Department of Mathematics