

论假相当位温的数值计算(三)

陈 创 买

(大气科学系)

摘 要

从理论分析和实验计算两方面讨论了水滴冻结贡献系数的特性。结果表明,这些系数具有正贡献和负贡献两方面的特性,并且证明了产生这些特征的物理原因是冰面与水面之间的饱和水汽压差。此外,本文还讨论了水质物比热贡献系数的精确计算,研究了Simpson's公式的不合理性和误差。发现M与P、T、 T_d 之间对数线性相关性,用非线性回归方法建立了M的新经验方程。

关键词 假相当位温,水滴冻结潜热,水质物比热

完整假相当位温公式^[1]分别用水滴冻结贡献系数(简称 $\exp(B)$,下同),和水质物比热贡献系数(简称 $\exp(M)$,下同),来表示这两种因素的影响。为了应用,必须研究这两种因素随P、T的变化特征。由于R. H. Simpson关于M的经验指数方程存在正偏差,我们仍拟讨论指数M的精确计算问题,分析中所有数学符号意义均与文献[1]相同。

1 水滴冻结贡献系数性质的理论分析

含有贝吉龙(Bergeron)过程的 $\exp(B)$ 的性质与 $\exp(A)$ 的很相似,但由于它的表达式很复杂,理论分析甚为困难。所以我们拟对 $\exp(A)$ 作理论分析,再对两者的实验计算结果作比较,以阐明 $\exp(B)$ 的性质。

1.1 $\exp(A)$ 存在正贡献和负贡献特性

根据文献[1],我们将证明,在对流层大气的压温湿变化范围内, $\exp(A)$ 存在如下特性。

$$\exp(A) = 1 \begin{cases} > & \text{正贡献} \\ < & \text{负贡献} \end{cases} \quad (1)$$

这种特性可使 θ_{set} 对大气的垂直运动的影响更为显著。

1.1.1 $\exp(A)$ 的零贡献界限冻结气压 p_{ic}

A. $\exp(A)$ 对 θ_{se} 产生正贡献。

根据文献[1],必须

$$A(p_i, T_i) = V_i(p_i, T_i) - V_w(p_i, T_i) > 0 \quad (2)$$

用 V_i 和 V_w 的表达式代入(2)式, 经整理得

$$\frac{0.622}{c_{pd} T_i} \frac{p_i}{p_{iw}} [p_i \phi(T_i) - \eta(T_i)] > 0$$

其中

$$\begin{cases} p_i = p_t - e_i(T_i) > 0 \\ p_{iw} = p_t - e_w(T_i) > 0 \\ \phi(T_i) = e_i(T_i)L_i(T_i) - e_w(T_i)L_w(T_i) \\ \eta(T_i) = e_i(T_i)e_w(T_i)[L_i(T_i) - L_w(T_i)] \end{cases} \quad (3)$$

因而得, 在所有水滴冻结高度上的气压, 必须满足

$$p_i \phi(T_i) - \eta(T_i) > 0 \quad (4)$$

在一般天气学研究的实际大气的温压变化范围内, 函数 $\phi(T_i)$ 和 $\eta(T_i)$ 存在如下性质.

(a) $\eta(T_i) > 0$. 因为据(3)式和文献[1], 仅当 $T_i \leq T_{id} = 115.6^\circ\text{K}$ (或 -157.56°C) 时, $\eta(T_i) \leq 0$. 这在实际大气中是不可能出现的.

(b) 在 T_{id} 处存在

$$\phi(T_i) \geq 0, \quad \text{当 } T_i \geq T_{id} \quad (5)$$

T_{id} 称为 $\exp(A)$ 的零贡献界限冻结温度.

$\phi(T_i)$ 是一超越方程, 用逼近法解之得 $T_{id} = -11.8^\circ\text{C} = 261.36^\circ\text{K}$. 因为冻结气压仅当取正值 ($p_i > 0$) 时才有意义, 所以要使(4)式成立, 就要求 $\phi(T_i) > 0$ (对应 $T_i > T_{id}$), 因而水滴冻结潜热对 θ_{se} 有正贡献条件为: $T_i > T_{id}$, 且 $p_i > \eta(T_i)/\phi(T_i)$.

B. $\exp(A)$ 对 θ_{se} 产生负贡献.

这时必须 $A(p_i, T_i) < 0$. 经过相类似的分析, 得其出现条件为: $T_i < T_{id}$, 或 $T_i > T_{id}$, 但 $p_i < \eta(T_i)/\phi(T_i)$.

C. $\exp(A)$ 对 θ_{se} 无任何贡献.

这时必须 $\exp(A) = 1$

综合上述分析, $\exp(A)$ 存在一个零贡献界限冻结气压

$$p_{ic}(T_i) = \begin{cases} \eta(T_i)/\phi(T_i), & \text{当 } T_i > T_{id} \\ +\infty, & \text{当 } T_i = T_{id} \\ \text{不存在}, & \text{当 } T_i < T_{id} \end{cases}$$

其变化曲线如图1所示. 从图中可见, 仅当 $T_i > T_{id}$ 时, 在曲线上方 $p_i > p_{ic}$ 的区域内, $A(p_i, T_i) > 0$, 水滴冻结潜热对 θ_{se} 具有正贡献, 在其它区域都是负贡献.

D. 产生 $\phi(T_i) = 0$ 的物理原因.

可以解释为, 在 T_{id} 处, 冰面与水面的饱和水汽压差达到极大 (或者说其差值随温度的变化率为零). 因为根据克劳修斯——克拉珀珑方程^[3,4,5], 冰面与水面饱和水汽压随温度的变化率分别为

$$\begin{cases} \partial e_i(T)/\partial T = e_i(T)L_i(T)/(R_w T^2) \\ \partial e_w(T)/\partial T = e_w(T)L_i(T)/(R_w T^2) \end{cases}$$

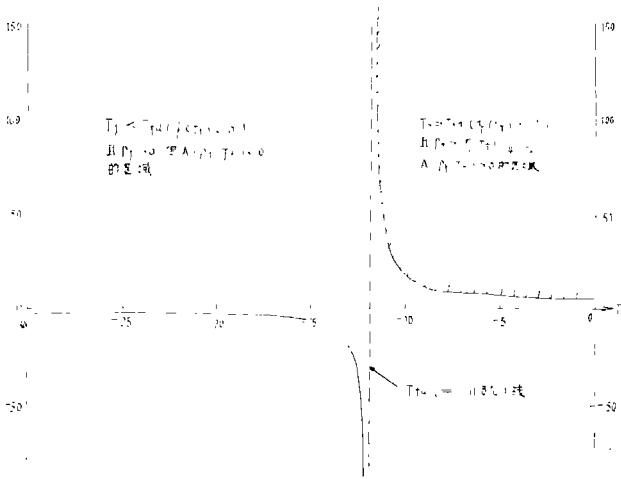


图 1 exp(A) 的零贡献界限冻结气压 (Pfc) 随温度 (Tf) 的变化曲线

Fig. 1 The curves of variation of null contribution bound freezing pressure (Pfc) with temperature (Tf) which the coefficient exp(A)

所以，令上述两式的差以零为界

$$\frac{\partial}{\partial T_f} [e_i(T_f) - e_w(T_f)] = \frac{\phi(T_f)}{R_w T^2} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix} \tag{6}$$

得 $\phi(T_f) \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$ ，即(5)式。由冰面饱和水汽压和水面饱和水汽压理论分析和实验资料^[6]得知

$$\frac{\partial [e_i(T_f) - e_w(T_f)]}{\partial T_f} \begin{matrix} \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}, \text{ (当 } T_f \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} T_{fd} \text{)} \tag{7}$$

显然，(7)式和(5)式是等价的。这一结果表明，水滴冻结对假相当位温的影响，微妙地受冰面与水面的饱和水汽压差所控制。

1.1.2 exp(A)的零贡献界限冻结温度 T_{fc}
 在冻结高度 $p_f (> p_{fc})$ 上，exp(A)存在零贡献界限冻结温度 T_{fc} 。假定 $\eta(T_f) > 0$ ，则(4)式可写成： $\phi(T_f) > \eta(T_f)/p_f$ 。由此式可以确定 T_{fc} ，它也是一个超越方程，用不同的 p_f 和 T_f 作模拟计算，结果如图2所示。从图2可见， $T_{fc}(p_f) \approx T_{fd} = -11.8^\circ\text{C}$ ，接近于常数。只当 p_f 较小时， T_{fc} 随 p_f 有微小的变化。

1.2 exp(A)随 p_f 的变化率

取文献[1]的(9)式的自然对数，并对 p_f 求偏导数，有

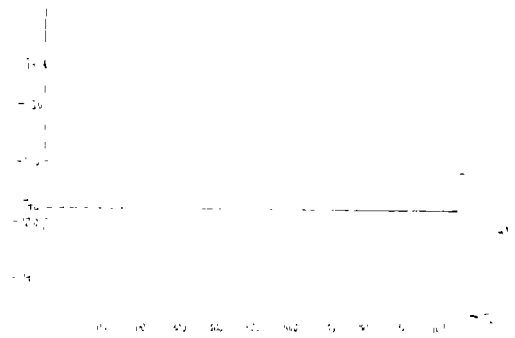


图 2 exp(A)零贡献界限冻结温度(Tfc)随气压(pf)变化曲线

Fig. 2 The curve of variation of null contribution bound freezing temperature (Tfc) with pressure (pf) which the coefficient exp(A)

$$\frac{1}{\theta_{set}} \left[\frac{\partial \theta_{set}}{\partial p_f} \right]_{T_f} = \left[\frac{\partial A(p_f, T_f)}{\partial p_f} \right]_{T_f}$$

$$= - \left[\frac{V_i(p_f, T_f)}{p_f - e_i(T_f)} - \frac{V_w(p_f, T_f)}{p_f - e_w(T_f)} \right]_{T_f} = S(p_f, T_f) \quad (8)$$

由数值计算指出, 当 $T_f > T_{fd}$ 时, $S(p_f, T_f) < 0$, $\exp(A)$ 随冻结气压 p_f 的升高而减少, 当 $T_f < T_{fd}$ 时, $S(p_f, T_f) > 0$, $\exp(A)$ 随 p_f 的升高而升高。令(8)式等于零, 得到确定不同 T_f 下, $\exp(A)$ 极值时的冻结气压 $p_{fm}(T_f)$ 的一元二次方程

$$mp_{fm}^2 + np_{fm} + S = 0 \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} m = 0.622[e_i(T_f)L_i(T_f) - e_w(T_f)L_w(T_f)]/c_{pd}T_f \\ n = 1.244e_i(T_f)e_w(T_f)[L_w(T_f) - L_i(T_f)]/c_{pd}T_f \\ S = 0.622e_i(T_f)e_w(T_f)[e_w(T_f)L_i(T_f) - e_i(T_f)L_w(T_f)]/c_{pd}T_f \end{cases}$$

方程(9)式的解根号前取正号对应于某一 T_f 下 $\exp(A)$ 的极大值点处的气压 p_{fm} (对 $T_f > T_{fd}$) 或虚值点 p'_{fm} (对 $T_f < T_{fd}$)。数值计算表明, 除了在 T_f 从 -10°C 至 -11.8°C 的窄小温度范围外, 其它 T_f 下 $\exp(A)$ 的极值都不会出现在计算的气压区域内 ($50 < p_f < 1050\text{hPa}$) 进一步分析发现, 当 $p_f > p_{fm}$ 时, θ_{set} 对 p_f 的二阶偏导数为正值, 即 $(\partial^2 \theta_{set} / \partial p_f^2)_{T_f} > 0$, 或 $[\partial^2 A(p_f, T_f) / \partial p_f^2]_{T_f} > 0$ 。说明 $\exp(A)$ 随 p_f 的变化是下凹的。

1.3 $\exp(A)$ 随 T_f 的变化率

取文献[1]的(9)式的自然对数, 并对 T_f 求偏导数, 得

$$\frac{1}{\theta_{set}} \left[\frac{\partial \theta_{set}}{\partial T_f} \right]_{p_f} = \left[\frac{\partial A(p_f, T_f)}{\partial T_f} \right]_{p_f}$$

$$= V_i(p_f, T_f)Q_i(p_f, T_f) - V_w(p_f, T_f)Q_w(p_f, T_f) \quad (10)$$

其中

$$Q_i(p_f, T_f) = - \left[-\frac{c_i}{L_i(T_f)T_f} + \frac{1}{T_f^2} \right] + \frac{p_f}{(p_f - e_i(T_f))R_w T_f} \quad (11)$$

$$Q_w(p_f, T_f) = - \left[\frac{c_w}{L_w(T_f)T_f} + \frac{1}{T_f^2} \right] + \frac{p_f}{(p_f - e_w(T_f))} \frac{L_w(T_f)}{R_w T_f} \quad (12)$$

令(10)式等于零, 得关于 T_f 的超越方程。

$$V_i(p_f, T_f)Q_i(p_f, T_f) = V_w(p_f, T_f)Q_w(p_f, T_f) \quad (13)$$

用模拟法求解(13)式, 得不同 p_f 时 $\exp(A)$ 的极值点上的冻结温度 $T_{fm} \approx -23.0^\circ\text{C}$ 。

再求 θ_{set} 对 T_f 的二阶偏导数, 有

$$\left[\frac{\partial^2 \theta_{set}}{\partial T_f^2} \right]_{p_f} = \theta_{set} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial T_f} \left[\quad \right] \right] + \left[\quad \right]^2 \right\} \quad (14)$$

其中 $[\quad]$ 为 θ_{set} 对 T_f 的一阶偏导数项。数值计算表明, (14)式大于零。这两项结果说明 $\exp(A)$ 随 T_f 变化曲线是下凹的, 在 $T_{fm} = -23.0^\circ\text{C}$ 附近出现极小值。

2 水滴冻结贡献系数性质的实验计算

取 T_f 从 0°C 至 -40°C 间隔 0.2°C , p_f 从 50hPa 至 1000hPa 间隔 50hPa , 利用文献〔1〕的(5)~(12)式, 计算出 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 p_f 和 T_f 的变化, 部分结果列于表1和表2。

表1 系数 $\exp(A)$ 随冻结气压(p_f)和温度(T_f)的变化

Tab. 1 Variation of coefficient $\exp(A)$ with the freezing -pressure(P_f) and -temperature (T_f)

项目	0°C	-10°C	-12°C	-20°C	-30°C
50 hPa	1.11089	1.00497	0.99766	0.98603	0.98803
100 hPa	1.05039	1.00293	0.99929	0.99324	0.99406
200 hPa	1.02409	1.00156	0.99975	0.99668	0.99704
400 hPa	1.01179	1.00080	0.99990	0.99835	0.99853
500 hPa	1.00939	1.00065	0.99993	0.99863	0.99882
700 hPa	1.00667	1.00047	0.99995	0.99906	0.99916
850 hPa	1.00548	1.00038	0.99996	0.99023	0.99931
1000 hPa	1.00466	1.00033	0.99997	0.99934	0.99941

表2 系数 $\exp(B)$ 随冻结气压(p_f)和温度(T_f)的变化

Tab. 2 Variation of coefficient $\exp(B)$ with the freezing -pressure(P_f) and -temperature (T_f)

项目	0°C	-10°C	-20°C	-30°C	-40°C
50 hPa	1.11089	1.07904	1.03899	1.01142	0.99970
100 hPa	1.05039	1.03347	1.01386	1.00199	0.99849
200 hPa	1.02409	1.01373	1.00399	0.99947	0.99842
400 hPa	1.01179	1.00525	1.00068	0.99921	0.99929
500 hPa	1.00939	1.00379	1.00026	0.99927	0.99941
700 hPa	1.00667	1.00229	0.99992	0.99939	0.99956
850 hPa	1.00549	1.00170	0.99983	0.99947	0.99963
1000 hPa	1.00466	1.00132	0.99979	0.99953	0.99968

2.1 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 p_f 和 T_f 变化的形势

对全部结果进行分析后看出, $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 的变化形势很相同。总的趋势是, 对确定的 p_f , 它们的值均随 T_f 而增加; 但对确定的 $T_f > T_{fd}$ (或 T_{ic}), 则它们随 p_f 的增加而减少; 反之, 则它们随 p_f 增加而增加。

2.2 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 零贡献界限冻结气压和温度分布廓线

结果表明, 在 p_f 和 T_f 的计算范围内, $\exp(A)$ 的零贡献界限分布廓线为 $T_{ic} = -11.8^\circ\text{C} = 261.36^\circ\text{K}$ 的一条直线, 不受 p_f 的影响。 $\exp(B)$ 的零贡献界限受冻结温度

T'_{fc} 和气压 p'_{fc} 的影响, 其 p'_{fc} 和 T'_{fc} 有一一对应关系, 我们称它为 $\exp(B)$ 的零贡献界限冻结温度和气压分布廓线(表3)。它对计算实际大气的 θ'_{sel} 有重要意义。这种分布廓线可用如下多项式表示:

$$T'_{fc} = -61.364 + 2.098(\ln p'_{fc})^2 - 0.171(\ln p'_{fc})^3 \quad (15)$$

表3 系数 $\exp(B)$ 零贡献界限冻结温度(T'_{fc})随气压(p'_{fc})分布廓线

Tab. 3 Distribution profile of null contribution bound freezing temperature (T_{fc}) with pressure (P_{fc}) which the coefficient $\exp(B)$

P'_{fc} (hPa)	1000	950	900	850	800	750	700	650	600	550
T'_{fc} (°C)	-17.7	-17.9	-18.1	-18.4	-18.7	-19.1	-19.5	-19.9	-20.3	-20.7
P'_{fc} (hPa)	500	450	400	350	300	250	200	150	100	50
T'_{fc} (°C)	-21.3	-22.1	-22.8	-23.7	-24.9	-26.2	-27.9	-30.2	-33.5	-39.5

2.3 对确定的 p_i , $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 T_i 变化

取 $p_i = 700\text{hPa}$, $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 T_i 的变化如图3。从图可见, 两系数的曲线均随 T_i 而增加, 且 $\exp(B)$ 曲线在上, 同时两系数的曲线均存在零贡献冻结温度 T_{ic} , 对 $\exp(A)$ 曲线, $T_{ic} = -11.8^\circ\text{C}$; 对 $\exp(B)$ 曲线, $T_{ic} = -19.4^\circ\text{C}$, 后者比前者低了 7.6°C , 说明在实际大气中, $\exp(B)$ 比 $\exp(A)$ 有更大的垂直空间可供对 θ_{se} 产生正贡献的机会。

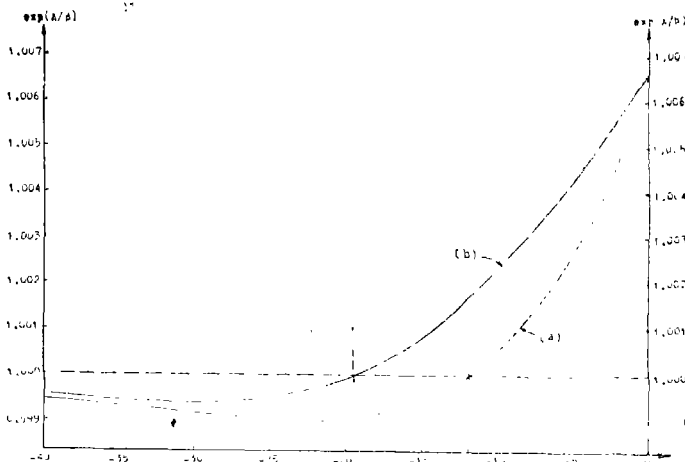


图3 $p_f = 700\text{hPa}$ 时, 系数 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随温度(T_f)的变化曲线
Fig. 3 The curves of variation of coefficient $\exp(A)$ and $\exp(B)$ with temperature(T_f), while $P_f = 700 \text{ hPa}$

2.4 对确定的 T_i , $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 p_i 变化

取 $T_i = -5^\circ\text{C}$, $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 p_i 变化曲线如图 4 a—b。由图显见, 两曲线均随 p_i 的降低而增加, 且 $\exp(B) > \exp(A)$ 。因为 $T_i = -5^\circ\text{C} > T_{id}$, 故两系数皆不出现负贡献的情形。当取 $T_i = -22^\circ\text{C}$ (图 4c—d), 则 $\exp(A)$ 完全为负贡献, 而 $\exp(B)$ 在 $p_i > 450\text{hPa}$ 以后也为负贡献。

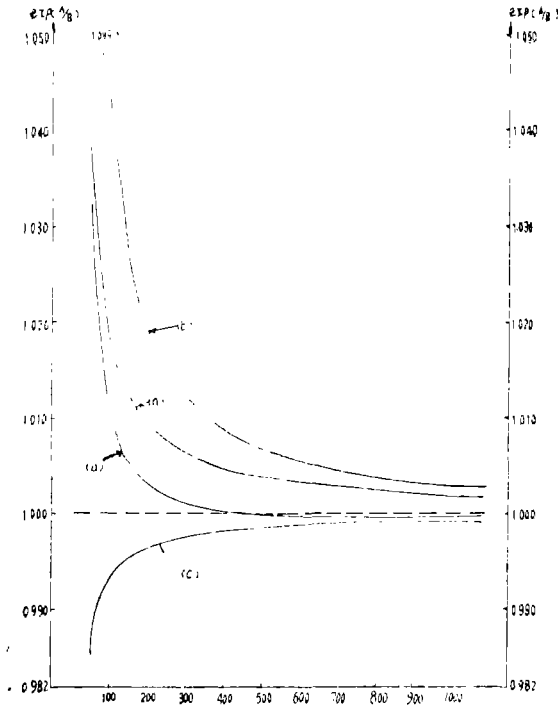


图 4 不同 T_f 时, 系数 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随气压 (p_f) 变化曲线

Fig. 4 The curves of variation of coefficient $\exp(A)$ and $\exp(B)$ with pressure (p_f), while different temperature (T_f)

- (1) $T_f = -5^\circ\text{C}$
(a) $\exp(A)$, (b) $\exp(B)$
- (2) $T_f = -22^\circ\text{C}$
(c) $\exp(A)$, (d) $\exp(B)$

2.5 不同 p_i 时, $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 极小值点的温度 T'_{im} 的分布

对不同的 p_i , $\exp(A)$ 极值点的温度 $T'_{im} \approx -23.0^\circ\text{C}$, 而 $\exp(B)$ 极值点的温度 T'_{im} 随 p_i 而增减, 且在全部极值点上 $T'_{im} < T'_{ic}$ 。这个分布可用如下多项式表示:

$$T'_{im} = -65.961 + 1.727(\ln p_i)^2 - 0.136(\ln p_i)^3 \tag{16}$$

这样, 当 $p_i = 1000\text{hPa}$ 时, $T'_{im} = -28.8^\circ\text{C}$, 当 $p_i = 150\text{hPa}$ 时, $T'_{im} = -39.7^\circ\text{C}$ 。

2.6 不同 T_i 时, $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 极小值点气压 p'_{im} 的分布

对不同的 T_i , 在所计算的气压范围内, $\exp(A)$ 不出现极小值, $\exp(B)$ 的极小值点的气压 p'_{im} 随 T_i 而升降 (表略)。

3 水质物比热贡献的精确计算

据文献 [1] 的 (3) 式, 水质物比热贡献指数

$$M = \frac{c_w}{c_{pd}} \int_{(p_n, T_n)}^{(p_c, T_c)} W d \ln T \tag{17}$$

可用数值积分表示。

3.1 不考虑水滴冻结潜热影响

在这种情况下, (17) 式的数值积分为

$$\hat{M} = \frac{c_w}{c_{pd}} \sum_{k=1}^N \frac{W_{sk} \Delta T}{T_k} \tag{18}$$

其中取

$$\begin{cases} T_n = 173.16^\circ\text{K}, N = [(T_c - T_n)/0.5] \\ \Delta T = (T_c - T_n)/N, T_k = T_n + k \cdot \Delta T, \Delta p = \ln(p_c/p_n)/N \\ p_k = \exp(\ln p_n + k \cdot \Delta p), W_{sk} = W_s(p_k, T_k) \end{cases} \tag{19}$$

我们称由 (18) 式计算的 \hat{M} 值为 M 的真值。把 \hat{M} 值与由 R. H. Simpson^[2] 建立的 M 的经验指数方程 \hat{M}_s 值比较, 用实际资料反复试验发现, Simpson 经验公式存在正偏差。究其原因, 一方面可能由于建立方程的资料缺乏代表性, 另一方面可能由于该方程夸大了 T_c 因子的作用, 因方程中 θ_{se} 原已为 T_c 的函数。而用逐步相关法建立方程可能并未消除 θ_{se} 和 T_c 的相关性。分析发现, \hat{M} 与 p, T 和 T_d 之间存在密切的对数 (或双对数) 线性相关。据此, 利用广州 1, 4, 7, 10 月平均探空共 73 个包含各种不同 p, T 和 T_d 值的点计算出的 \hat{M} 值, 建立 M 的非线性回归经验方程

$$\begin{aligned} \ln \hat{M}_{c1} = & -1.946664 \ln p + 0.063958 (\ln p)^2 + 147.83943 \ln T \\ & - 13.27711 (\ln T)^2 + 134.01091 \ln \ln T_d - 639.19196 \end{aligned} \tag{20}$$

其复相关系数达 $R = 0.99992$, 拟合均方误差为 $\sigma = 0.027735$ 。表 4 列出了水质物比热

表 4 水质物比热贡献指数 (M) 的计算

Tab. 4 Calculation of contribution exponent (M) of water substantial specific heat

项 目	1	2	3	4	5
1 P	1000	850	700	500	350
2 T	306.46	295.36	288.66	274.26	250.66
3 T_d	304.46	292.36	284.16	266.26	242.26
4 P_c	971.754	813.384	654.615	441.946	304.587
5 T_c	303.963	291.670	283.189	264.766	240.911
6 θ_{se}	393.243	358.493	356.259	349.746	341.340
7 $\ln \hat{M}$	-4.654185	-5.341916	-5.744802	-6.821822	-8.677673
8 $\ln \hat{M}_{c1}$	-4.695740	-5.338562	-5.732300	-6.806396	-8.669556
9 $\Delta \ln \hat{M}_{c1}$	-0.041555	0.003354	0.012503	0.015426	0.008113
10 $\ln \hat{M}^*$	-4.674415	-5.515286	-6.097026	-7.711120	-9.777726
11 $\ln \hat{M}_{c1}^*$	-4.755615	-5.651123	-6.215149	-7.596985	-9.826172
12 $\Delta \ln \hat{M}_{c1}^*$	-0.081151	-0.135837	-0.118123	0.114135	-0.048446

贡献指数 \hat{M} 的 5 个计算个例, 其中第 7, 8 项对应公式 (18), (20) 的 \hat{M} 值, 第 9 项为第 8 项对第 7 项的计算误差。从表中可见, 用式 (20) 计算的 \hat{M}_{c1} 值与 \hat{M} 值误差是很小的。

3.2 考虑水滴冻结影响

在这种情况下, (17) 式可写成

$$\begin{aligned} \hat{M}^* &= \frac{c_w}{c_{pd}} \int_{(p_f, T_f)}^{(p_c, T_c)} W_d \ln T + \frac{c_i}{c_{pd}} \int_{(p_n, T_n)}^{(p_f, T_f)} W_{id} \ln T \\ &= \frac{c_w}{c_{pd}} \sum_{k_1=1}^{N_1} \frac{W_{k_1} \Delta T_1}{T_{k_1}} + \frac{c_i}{c_{pd}} \sum_{k_2=1}^{N_2} W_{ik_2} \end{aligned} \quad (21)$$

其中取

$$\begin{cases} T_n = 173.16^\circ \text{K}, N_1 = [(T_c - T_f)/0.5] \\ \Delta T_1 = (T_c - T_f)/N_1, T_{k_1} = T_f + k_1 \Delta T_1, \Delta p_1 = \ln(p_c/p_f)/N_1 \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} p_{k_1} = \exp(\ln p_f + k_1 \cdot \Delta p_1), W_{k_1} = W_{k_1}(p_{k_1}, T_{k_1}) \\ N_2 = [(T_f - T_n)/0.5], \Delta T_2 = (T_f - T_n)/N_2 \\ T_{k_2} = T_n + k_2 \cdot \Delta T_2, \Delta p_2 = \ln(p_f/p_n)/N_2 \\ p_{k_2} = \exp(\ln p_n + k_2 \cdot \Delta p_2), W_{ik_2} = W_{ik_2}(p_{k_2}, T_{k_2}) \end{cases} \quad (23)$$

我们称由 (21) 式计算的 \hat{M}^* 值为 M^* 的真值。分析发现, \hat{M}^* 与 p, T, T_d 有良好的对数线性相关, \hat{M}^* 的经验方程为

$$\begin{aligned} \ln \hat{M}_{c1}^* &= -4.63912 \ln p + 0.28177 (\ln p)^2 + 99.17902 \ln T \\ &\quad - 8.73570 (\ln T)^2 + 146.49065 \ln \ln T_d - 523.12414 \end{aligned} \quad (24)$$

其复相关系数达 $R = 0.99937$, 均方根拟合误差 $\sigma = 0.092964$ 。计算例列在表 4 第 10~12 项, 可见由 (24) 式计算的结果的相对误差小于 2%。通过数值计算表明, $\hat{M} > \hat{M}^*$, 即是说, 考虑冻结潜热后, 水质物比热对 θ_{sc} 的贡献将略为减小。

4 初步结论

① $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 存在正贡献, 零贡献和负贡献的特性, 产生这一特性的物理原因是冰面与水面的饱和水汽压差。 $\exp(A)$ 的零贡献界限冻结温度为 $T_{fd} = -11.8^\circ \text{C}$, 不受 p_f 的影响, $\exp(B)$ 的零贡献界限冻结温度 T'_{fc} 随气压 p'_{fc} 而变化, 反之亦然。

② $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 随 T_f 而增大。当 $T_f > T_{fd}$ (或 T_{fc}) 时, 它们随 p_f 增大而减少, 反之则增加。

③ 在不考虑水滴冻结的情况下, 通过对水质物比热贡献指数 M 的精确计算, 发现 M 的 Simpson 经验方程 \hat{M} 存在正偏差, 并以 p, T, T_d 为参数建立了 M 的新的经验方程 \hat{M}_{c1} 。

④ 在考虑水滴冻结情况下, 通过对水质物比热贡献指数 M^* 的精确计算, 发现水滴冻结可使此项贡献减少 10%。其实际效果可使计算出的 θ_{sc} 减少 $0.2 \sim 0.3^\circ \text{K}$ 。同样建立了 M^* 的经验方程。

参 考 文 献

- [1] 陈创买, 中山大学学报(自然科学版), 29(1990), 1, 82~88
[2] Simpson R H, *Mon. Wea. Rev.*, 106(1978), 1, 124~130
[3] П, H. 特维尔斯基戈伊等著[苏], 仇永炎等译, 气象学教程(第一册), 高等教育出版社, 1958
[4] 正野重方著[日], 吴伯雄译, 动力气象学, 科学出版社, 1960
[5] 陈世训, 陈创买编著, 气象学, 农业出版社, 1981
[6] 中央气象局编, 湿度查算表(乙种本), 气象出版社, 1980

On the Numerical Computation of Potential Pseudo-equivalent Temperature (Ⅲ)

Chen Chuangmai*

Abstract

The properties of contribution coefficient of waterdroplets freezing in both aspects of theoretical analysis and experimental calculation is discussed in this paper. The results shows that the coefficients has the characteristics of both positive and negative contribution. And the difference of the saturation vapour pressure between the pure phase with respect to ice and water in which the physical reason of the occurrence of this characteristics is proved. In addition, the accurate calculation of contribution coefficient of water substantial specific heat is discussed, and the unrationality and error of Simpson's formula is studied, and the logarithmic linear correlativity between M and P, T, Td are discovered, a new empirical equation of M with the method of nonlinear regression is established.

Keywords Potential pseudo-equivalent temperature, Latent heat of waterdroplets freezing, specific heat of water substance

* Dept. of Atmospheric Sciences