中 山 大 学 学 报
1988年第4期　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　№. 4, 1988

标号法效率的讨论及数值试验*

王 则 柯
（计算机科学系）

摘　要

用古典概率的方法，提出不动点算法中标号法效率的一种量度，并进行数值试验.

关键词　不动点算法，效率，古典概率

1．标号法的一般叙述

考虑用整数标号单纯不动点算法计算连续映射$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$的零点的问题.

称$\mathbf{R}^n$中有限个过原点的$n-1$维超平面决定的半空间的交集为$\mathbf{R}^n$的一个角锥，它的边界可以是开的、闭的、或分片开的或闭的. 边界上点的归属无关紧要.

定义 1　将$\mathbf{R}^n$分割为$n+1$个角锥γ_0，γ_1，…，γ_n的一个分割，称作是象空间$\mathbf{R}^n$的一个标号分割，记作$\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$.

按照下述方法，标号分割已将标号法完全确定.

定义 2　给定$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，$\mathbf{R}^n$的一个单纯剖分$T$，$\mathbf{R}^n$的一个标号分割$\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$. 记$T$的顶点集为$V(T)$. 称对应$L:V(T)\to\{0, \cdots, n\}$为$\mathbf{R}^n$的一个基于剖分$T$和标号分割$\Gamma$的由$f$诱导的标号法，如果对每个顶点$x\in V(T)$，

$$L(x)=j \quad \text{当且仅当} \quad f(x)\in\gamma_j .$$

在不致混淆时，也说L是$\mathbf{R}^n$的一个由f诱导的标号法，或只称$\mathbf{R}^n$的标号法.

我们关于标号分割和标号法的叙述，概括了一切现有的整数标号法.

例 1　$n=1$时的不动点算法就是对分区间套法. $\mathbf{R}^1$的标号分割只有两种：$\gamma_0=(-\infty, 0]$，$\gamma_1=(0, +\infty)$和$\gamma_0=(-\infty, 0)$，$\gamma_1=[0, +\infty)$，它们都对应于对分区间套法.

例 2　将$\mathbf{R}^2$与复数z平面$\mathbf{C}$等同，辐角$\arg z$取值限制在$(-\pi, \pi]$. 取$\gamma_0=\{z\in\mathbf{C}: z=0 \text{或} -\pi/3\leqslant\arg z\leqslant\pi/3\}$，$\gamma_1=\{z\in\mathbf{C}:\pi/3<\arg z\leqslant\pi\}$，$\gamma_2=\{z\in\mathbf{C}: -\pi<\arg z<-\pi/3\}$，

本文1987年2月19日收到
● 中山大学高等学术研究中心基金会资助课题

显然$\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$构成$\mathbf{R}^2$的一个标号分割。按照$L(z)=j$当且仅当$f(z)\in\gamma_j$，我们得到$\mathbf{R}^2$的Kuhn标号法[2]。为此，称上述标号分割$\Gamma$为$\mathbf{R}^n$的Kuhn标号分割。

例 3　相应于所谓标准标号法[3]的是$\mathbf{R}^n$的标准标号分割$\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$，其中

$$\gamma_0=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1\leqslant 0\},$$
$$\gamma_1=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1>0,\ x_2\leqslant 0\},$$
$$\cdots$$
$$\gamma_{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1>0,\ \cdots,\ x_{n-1}>0,\ x_n\leqslant 0\},$$
$$\gamma_n=\{x\in\mathbf{R}^n: x_1>0,\ \cdots,\ x_n>0\}.$$

$\mathbf{R}^n$中角锥γ的测度$m(\gamma)$定义为γ与$\mathbf{R}^n$中$n-1$维单位球S^{n-1}之交在S^{n-1}中的测度。对于标准标号法，$m(\gamma_0)=\max\limits_i\{m(\gamma_i)\}$，$m(\gamma_n)=\min\limits_i\{m(\gamma_i)\}$，并且$m(\gamma_0)=2^{n-1}m(\gamma_n)$。

由此引入标号分割的对称系数的概念。

定义 3　设$\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$是$\mathbf{R}^n$的一个标号分割。称非负实数$\eta=\min\limits_j\{m(\gamma_j)\}/\max\{m(\gamma_i)\}$为$\Gamma$的对称系数，并记作$\eta(\Gamma)$。

显然，对于$\mathbf{R}^n$的任何标号分割Γ，$0<\eta(\Gamma)\leqslant 1$。设$\Gamma$，$\Gamma'$是$\mathbf{R}^n$的两个标号分割，当$\eta(\Gamma)>\eta(\Gamma')$时，自然地说$\Gamma$的对称性好于$\Gamma'$。当$\eta(\Gamma)\geqslant\eta(\Gamma')$时，说$\Gamma$的对称性不差于$\Gamma'$。

例 4　设Γ是$\mathbf{R}^n$的标准标号分割，则$\eta(\Gamma)=m(\gamma_n)/m(\gamma_0)=m(\gamma_n)/2^{n-1}m(\gamma_n)=2^{1-n}$。可见，$n$越大，对称系数越小。

例 5　设$\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$是$\mathbf{R}^2$的Kuhn标号分割，显然$\eta(\Gamma)=1$。可见，$\mathbf{R}^2$的Kuhn标号分割具有最好的对称性。

作为Kuhn标号分割的推广，引入

例 6　$\mathbf{R}^n$的嵌入标号分割：将$\mathbf{R}^n$嵌入$\mathbf{R}^{n+1}$，成为经过$v^0=(1, 0, \cdots, 0)^T$，$v^1=(0, 1, 0, \cdots, 0)^T$，$\cdots$，$v^{n-1}=(0, \cdots, 0, 1, 0)^T$，$v^n=(0, \cdots, 0, 1)^T$的$n$维超平面，并仍记作$\mathbf{R}^n$，它是以$v^0$，$\cdots$，$v^n$为顶点的$n$维标准单纯形$\sigma^n$的仿射包。在$\mathbf{R}^n$中取以$\sigma^n$的重心为原点的直角坐标系。这时，由$\sigma^n$的$n+1$个$n-1$维面确定的$n+1$个角锥$\gamma_0$，$\cdots$，$\gamma_n$组成$\mathbf{R}^n$的一个标号分割，称为$\mathbf{R}^n$的一种嵌入标号分割。

对于嵌入标号分割$\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$，显然有$m(\gamma_0)=\cdots=m(\gamma_n)$，所以$\eta(\Gamma)=1$。可见，嵌入标号分割具有最好的对称性。

2 标号分割的原效率

例 7　视$\mathbf{R}^2$同$\mathbf{C}$，令$\gamma_0=\{z\in\mathbf{C}: z=0$或$-\pi/5\leqslant\arg z\leqslant\pi/5\}$，$\gamma_1=\{z\in\mathbf{C}: \pi/5<\arg z\leqslant\pi\}$，$\gamma_2=\{z\in\mathbf{C}: -\pi<\arg z<-\pi/5\}$，则$\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$成为$\mathbf{R}^2$的一个标号分割，并且$\eta(\Gamma)=1/2$，与$\mathbf{R}^2$的标准标号分割有同样的对称系数。

例子说明，用对称系数来刻划标号法的效率，即使在$n=2$时也太粗糙。而随着维数n的增大，人们有太多的自由度去构造具有相同对称系数，但效率显然很不相同的标号分割。下面，按照不动点算法的机理，引入原效率的概念。

不动点算法每一步走到的地方，都是一个n维单纯形，其$n+1$个顶点在映射f之下的象正好分布在$\mathbf{R}^n$的标号分割的$n+1$个角锥。

定义 4　设 $\Gamma=\{\gamma_0, \cdots, \gamma_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个标号分割。设 $y^0, \cdots, y^n$ 是 $n+1$ 个相互独立的 n 维随机变量，它们都服从标准的 n 维正态分布。在 $y^0, \cdots, y^n$ 分属 $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$ 的条件下，凸包 $conv\{y^0, \cdots, y^n\}$ 包含原点的条件概率，称作标号分割 Γ 的含原点概率，记作 $p(\Gamma)$。

Γ 的含原点概率也就是向 $\mathbf{R}^n$ 随机地分布 $n+1$ 个点，在 $n+1$ 个点分属 Γ 的 $n+1$ 个角锥的条件下，它们的凸包包含原点的条件概率。

例 8　设 $\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的Kuhn标号分割，则 $p(\Gamma)=5/8$。

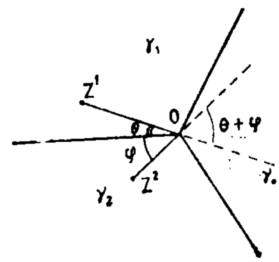

图　1

证明　要做的是古典几何概率计算：在 $z^i\epsilon\gamma_i$，$i=0, 1, 2$ 的条件下，$0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的条件概率。

记 $\theta=\pi-\arg z^1$，$\varphi=\pi+\arg z^2$，则 $0\leqslant\theta$，$\varphi\leqslant 2\pi/3$。当 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3$ 时，z^0 如果落在 γ_0 中图 1 虚线界定的区域，就有 $0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$，否则 $0\bar{\epsilon} conv\{z^0, z^1, z^2\}$。所以，这时 $0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的概率为 $P(\theta, \varphi)=(\theta+\varphi)/(2\pi/3)=3(\theta+\varphi)/2\pi$。同理可得：在 $0\leqslant\theta$，$\varphi\leqslant 2\pi/3$ 的条件下，$0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的概率为

$$P(\theta, \varphi)=\begin{cases}3(\theta+\varphi)/2\pi, & \text{当}0\leqslant\theta\leqslant\pi/3,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3,\\ 3(\theta+\pi/3)/2\pi, & \text{当}0\leqslant\theta\leqslant\pi/3,\quad \pi/3\leqslant\varphi\leqslant 2\pi/3,\\ 3(\varphi+\pi/3)/2\pi, & \text{当}\pi/3\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi/3,\\ 1, & \text{当}\pi/3\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3,\quad \pi/3\leqslant\varphi\leqslant\pi-\theta,\\ 0, & \text{当}\pi/3\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3,\quad \pi-\theta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi/3.\end{cases}$$

所以，在 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/3$ 的条件下，$0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的概率为

$$P(\theta)=\left[\int_0^{\pi/3}\frac{3(\theta+\varphi)}{2\pi}d\varphi+\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{3(\theta+\pi/3)}{2\pi}d\varphi\right]\Big/\frac{2\pi}{3}$$

$$=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$

在 $\pi/3\leqslant\theta\leqslant 2\pi/3$ 时，$0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的概率

$$P(\theta)=\left[\int_0^{\pi/3}\frac{3\varphi+\pi}{2\pi}d\varphi+\int_{\pi/3}^{\pi-\theta}d\varphi\right]\Big/\frac{2\pi}{3}=\frac{3}{2\pi}\left(\frac{11}{12}\pi-\theta\right).$$

这样，在 $z^i\epsilon\gamma_i$，$i=0, 1, 2$ 的条件下，$0\epsilon conv\{z^0, z^1, z^2\}$ 的条件概率是

$$p(\Gamma)=\left[\int_0^{\pi/3}\frac{3}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)d\theta+\int_{\pi/3}^{2\pi/3}\frac{3}{2\pi}\left(\frac{11}{12}\pi-\theta\right)d\theta\right]\Big/\frac{2\pi}{3}=\frac{5}{8}.$$

例 9　设 $\Gamma=\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 的标准标号分割，则 $p(\Gamma)=1/2$。

证明　记 $\theta=-\arg z^1$，$\varphi=\arg z^2$，由图 2 可知 $0\leqslant\theta$，$\varphi\leqslant\pi/2$，并且总有

$$P(\theta, \varphi)=(\theta+\varphi)/\pi.$$

所以，对于 $0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$，

$$P(\theta)=\left(\int_0^{\pi/3}\frac{\theta+\varphi}{\pi}d\varphi\right)\Big/\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\pi}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right),$$

进而，

$$p(\Gamma)=\left[\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\pi}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)d\theta\right]\Big/\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2},$$

符号意义均同例 8。

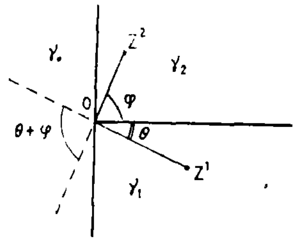

图 2

引理 1 设Γ和Γ'是R^n的两个嵌入标号分割，那末，$p(\Gamma)=p(\Gamma')$。

这是因为Γ和Γ'只差一个旋转。

定义 5 设$\Gamma=\{\gamma_0,\cdots,\gamma_n\}$是$R^n$的一个标号分割。称$\rho(\Gamma)=p(\Gamma)/p(\Gamma^*)$为标号分割$\Gamma$的原效率，其中$\Gamma^*$是$R^n$的任一嵌入标号分割。

引理 1 保证了定义的合理性。

例10 设Γ是R^2的Kuhn标号分割，有$\rho(\Gamma)=1$。这只要注意R^2的Kuhn标号分割是R^2的一种嵌入标号分割。

例11 设Γ是R^2的标准标号分割，则$\rho(\Gamma)=\frac{1}{2}\Big/\frac{5}{8}=\frac{4}{5}$。

3 数值试验

不动点算法的基本做法是：①给空间以适当的单纯剖分；②对剖分的顶点集确定适当的标号法；③按同标号顶替的转轴运算规则寻求剖分中的全标单纯形，作为问题的数值解。对于剖分法的效率，已经有相当深入的讨论[4-7]。对于标号法效率的探讨，本文尝试开头。以复平面自映射零点计算为例，进行了数值试验。在下面的例子中，以计算每个零点所需要的函数计值次数N为算法效率的主要标志，N_K对应于Kuhn标号分割，N_S对应于标准标号分割，都使用采取J_3剖分的Kuhn多项式求根算法。n阶多项式的n个计算结果依次记为z_1，…，z_n。

例12 计算$f(z)=z^2-100i$的根，见表 1。

表 1

j	z_j	N_K	N_S
1	7.0710678 + i 7.0710678	115	128
2	−7.0710678 − i 7.0710678	115	128

例13 在原点附近计算超越方程 $3z-1-\cos z=0$的 4 个根，结果见表 2。

表 2

j	z_j	N_K	N_S
1	5.6824440 + i 3.6605012	106	111
2	−2.2466720 + i 3.2069886	87	96
3	−2.2466720 − i 3.2069886	87	110
4	5.6824440 − i 3.6605012	106	106

数值试验显示，原效率较高的标号分割会带来较高的算法效率（降低计算成本），标号分割的原效率是标号法效率的一种合理的量度。

高维情形标号分割原效率的计算，可以采用蒙特卡罗方法进行。

参 考 文 献

〔1〕王则柯，单纯不动点算法基础，中山大学出版社，广州，1986.

〔2〕Kuhn, H. W., in *Fixed Points: Algorithms and Applications*, Academic Press, New York, 1977.

〔3〕Todd, M. J., *The Computation of Fixed Points and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

〔4〕Todd, M. J., in *Fixed Points: Algorithms and Applications*, Academic Press, New York, 1977.

〔5〕Todd, M. J., Math. Programming, 10(1976), 322.

〔6〕Saigal, R., in *Fixed Points: Algorithms and Applications*, Academic Press, New York, 1977.

〔7〕Eaves, B. C. & Yorke, J. A., Mathematics of Operations Research, 9 (1984), 363.

On Efficiency of Integer Labellings

Wang Zeke

Abstract

This paper proposes the pre-efficiency based on classical geometric probability as a measurement of efficiency of integer labellings in simplicial fixed point algorithms. Numerical experiment shows that, higher pre-efficiency of labellings results higher efficiency of computations.

Keywords classical probability, efficiency, fixed point algorithms