中山大学学报（自然科学版）
第28卷 第3期 1989年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.28 №.3 1989

·研究简报·

含有脉冲时滞逻辑斯蒂型方程解的渐近性质

徐 远 通
（数学系）

摘 要

研究含有脉冲的时滞逻辑斯蒂型方程存在渐近于驻定状态的解的判定准则，推广Gopalsamy，Kakutani 及 Markus 有关结果。

关键词 逻辑斯蒂型方程，渐近解

单种群的生态系统，若生长过程受历史状态制约，又受外界瞬动性干扰，则数学模型采用含脉冲的时滞逻辑斯蒂型方程

$$Dx(t)=x(t)[b-\sum_{j=1}^{n}a_j\,x(t-\tau_j)]Du,\quad t\geqslant t_0\geqslant 0 \tag{1}$$

其中a_j，τ_j和b是正数，而

$$u(t)=t+\sum_{k=1}^{\infty}c_kH_k,\quad H_k(t)=\begin{cases}0, & t<t_k\\ 1, & t\geqslant t_k\end{cases}$$

c_k是实数，时间序列$\{t_k\}$是递增的，$t_k\geqslant\tau=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{\tau_j\}$。

在方程（1）中所含的导数是分布导数，它的解一般是间断解。对含分布导数的常微分方程性质见专著[1]，本文将要探讨含分布导数的时滞方程性质。

主要结论

方程（1）在区间$[t_0,\infty)$上的解，是指定义在区间$[t_0-\tau,\infty)$上的右连续有界变差函数，对$t\in(t_0,\infty)$它在区间(t_0,t)上的分布导数满足（1）。

利用分步法，推知对$\phi\in C([t_0-\tau,t_0],R)$，存在方程（1）定义于$[t_0,\infty)$的解$x$，适合$x(s)=\phi(s)$，对$t_0-\tau\leqslant s\leqslant t_0$。易知方程（1）有正的驻定状态

$$x^*=b\Big/\Big(\sum_{j=1}^{n}a_j\Big) \tag{2}$$

注意到当$\tau=0$时，方程（1）化为含脉冲的常微分方程，满足初始条件$x(0)\neq x^*$的解可表为

$$x(t)=bx(0)\Big/\Big[\sum_{j=1}^{n}a_jx(0)+\Big(b-\sum_{j=1}^{n}a_jx(0)\Big)e^{-bt}\prod_{i=1}^{k-1}(1+c_ib)^{-1}\Big],\quad t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$$

本文1988年1月25日收到

它满足如下的渐近性质

(i) $x(t)-x^{*}\neq 0$, 对 $t\geqslant 0$

$$(3)$$

(ii) $x(t)-x^{*}\to 0$, 当 $t\to\infty$

需研究的是，当每个 τ_i 都不为零时，满足初始条件 $x(s)=\phi(s)\geqslant 0$, $-\tau\leqslant s\leqslant 0$ ($\phi(0)>0$)的解能否具有这种渐近性。为此，本文将对(1)存在非振动解提出条件。我们采用通常的定义，对某个常数 c，在 $[c,\infty)$ 上定义的实值函数称为非振动的，是指它在 $[c,\infty)$ 上至多存在有限个零点。

令 $x(t)=x^{*}+z(t)$, $t>0$，则方程(1)的线性变分系统(关于 x^{*})为

$$Dz(t)=-x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_j z(t-\tau_j)Du \qquad (4)$$

引理1 设正数 b,τ_i 及 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 使得

(i) $x^{*}\tau(\sum_{j=1}^{n}a_j)\leqslant 1/e$ (5)

(ii) $c_i>-\tau$, $i=1,2,\cdots$ (6)

则方程(4)存在非振动解，形如

$$z(t)=\alpha e^{-\mu t}\Big/\prod_{i=1}^{k-1}(1+c_i\mu),\quad t_{k-1}\leqslant t<t_k \qquad (7)$$

其中 α 和 μ 是某正数。

证明 将表达式(7)代入(4)，注意到当 μ 是以下方程的正根时

$$\mu=x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_j e^{\mu\tau_i},\quad 1+c_i\mu\neq 0,\quad i=1,2,\cdots$$

则(7)式中的 $z(t)$ 便是方程(4)的解。

记 $F(\mu)=\mu-x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_j e^{\mu\tau_i}$，则 $F(0)<0$ 且

$$F\left(\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\tau}-x^{*}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)e^{\tau_j/\tau}\geqslant[1-x^{*}\tau(\sum_{j=1}^{n}a_j)e]/\tau\geqslant 0,$$

由此推知存在实数 $\mu_0\in(0,\frac{1}{\tau})$ 使得 $F(\mu_0)=0$。

此外，若 $c_i\geqslant 0$，则 $1+c_i\mu_0>0$；若 $c_i<0$，则

$$1+c_i\mu_0=1+c_i x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_j e^{\mu_0\tau_j}\geqslant 1+c_i(x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_j e)>1+c_i\left(\frac{1}{\tau}\right)>0,$$

故在任何情况下都有 $1+c_i\mu_0\neq 0$。

因此，对上述的 μ_0，(7)所确定的 $z(t)$ 是方程(4)的解，且是非振动的(其中 α 为任意实数)，引理得证。

引理2 设正数 b,τ_i 及 $a_j(j=1,2,\cdots,n)$ 使得不等式(5)成立且

(ii)* 若 $c_i\leqslant -\tau$ 则 $(x^{*}\sum_{j=1}^{n}a_i)c_j\leqslant -1$ (8)

那么方程(4)存在非振动解，形如(7)。

证明从略

定理　设正数 b,τ_j 及 $a_j(j=1,2,\cdots n)$ 使(5)成立，且

(i)　$c_i>-\tau$，　对 $i=1,2,\cdots$

(ii)　$c_i+(t_i-t_{i-1})\geqslant 0$,

(iii)　$\sum_{k=1}^{\infty}[c_{k-1}+(t_k-t_{k-1})]<\frac{1}{b}$.

则存在方程(1)的解 $x(t)$，使得 $x(t)-x^*$ 在 $[0,\infty)$ 上没有零点，且当 $t\to\infty$ 时 $x(t)$ 趋于 x^*。

证明　作变量替换 $y(t)=\ln(x(t)/x^*)$，则方程(1)可化为

$$Dy(t)=-x^*\sum_{j=1}^{n}a_j[e^{y(t-\tau_j)}-1]Du \tag{9}$$

定义函数序列 $\{y_m(t)\},m=0,1,2,\cdots,t\in[-\tau,\infty)$，其中

$$y_m(t)=x^*\sum_{j=1}^{n}a_j\int_t^{\infty}[e^{y_{m-1}(s-\tau_j)}-1]\mathrm{d}u(s) \tag{10}$$

而
$$y_0(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\mu t}, & -\tau\leqslant t<t_0,\\ \alpha e^{-\mu t}\Big/\prod_{i=1}^{k-1}(1+c_i\mu), & t_{k-1}\leqslant t<t_k,\end{cases}$$

这里 α 及 μ 由表示式(7)得出。

由引理1及 $\{y_m(t)\}$ 的定义推知：

$$y_1(t)-y_0(t)=x^*\sum_{j=1}^{n}a_j\int_t^{\infty}[e^{y_0(s-\tau_j)}-y_0(s-\tau_j)-1]\mathrm{d}u(s)$$

$$\geqslant x^*\sum_{j=1}^{n}a_j\left\{\sum_{k=1}^{\infty}[c_k+(t_k-t_{k-1})][e^{y_0(t_k-\tau_j)}-y_0(t_k-\tau_j)-1]\right\}\geqslant 0$$

故对 $t\geqslant-\tau$ 有 $y_1(t)\geqslant y_0(t)$，而对 $y_m(t)\geqslant y_{m-1}(t)$ 时利用(10)递推有 $y_{m+1}(t)\geqslant y_m(t)$，由归纳法得出：

$$0\leqslant y_0(t)\leqslant y_1(t)\leqslant\cdots\leqslant y_m(t)\leqslant\cdots,\ 对\ t\geqslant-\tau \tag{11}$$

记　$L=x^*\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\sum_{k=1}^{\infty}[c_{k-1}+(t_k-t_{k-1})]$，从(2)及条件(iii)有

$$L=b\sum_{k=1}^{\infty}[c_{k-1}+(t_k-t_{k-1})]<1.$$

另一方面，由条件(i)知 $t\to\infty$ 时 $y_0(t)$ 趋于零，若选取 α 为足够小的正数，则可以使得 $y_0(t)\leqslant 1-L$。故有：

$$y_{m+1}(t)=x^*\sum_{j=1}^{n}a_j\left\{\int_t^{\infty}[e^{y_m(s-\tau_j)}-1]\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{\infty}c_k[e^{y_m(t_k-\tau_j)}-1]\right\}$$

$$\leqslant x^*\sum_{j=1}^{m}a_j\left\{\sum_{k=1}^{\infty}[c_{k-1}+(t_k-t_{k-1})]\frac{y_m(t_{k-1}-\tau_j)}{1-y_m(t_{k-1}-\tau_j)}\right\}$$

$$\leqslant L\cdot\frac{1-L}{1-(1-L)}=1-L.$$

由归纳法知对一切m有$y_m(t)\leqslant 1-L$。于是有$y^*(t)$使

$$\lim_{m\to\infty} y_m(t)=y^*(t)\leqslant 1-L \tag{12}$$

且从$y_m(t)\geqslant 0, m=0,1,2,\cdots$推出$y^*(t)\geqslant 0$。

由Lebesgue收敛原理，得到

$$y^*(t)=x^*\sum_{j=1}^{n}a_j\int_t^{\infty}[e^{y^*(s-\tau_j)}-1]\mathrm{d}u(s) \tag{13}$$

因此$y^*(t)\geqslant y_0(t)>0$，且

$$Dy^*(t)=-x^*\sum_{j=1}^{n}a_j[e^{y^*(t-\tau_j)}-1]Du \tag{14}$$

因为$y^*(t)$有界，从表达式(13)易知，$y^*(t)$是方程（9）的正解，且随t的增大而趋于零。取$x^*(t)=x^*e^{y^*(t)}$，则$x^*(t)$是方程（1）的正解，且$x^*(t)-x^*$在$[0,\infty)$上没有零点，而$t\to\infty$时$x^*(t)$趋于x^*。定理得证。

注记 本文只讨论了方程（1）。利用这种研究方法，类似地可讨论下列方程解的渐近性：

$$Dx(t)=x(t)[b-a\int_0^{\infty}k(s)x(t-s)\mathrm{d}s]Du,$$

$$Dx(t)=x(t)[b-ax(t)-\sum_{j=1}^{n}a_jx(t-\tau_j)]Du.$$

文[2]—[4]在研究生态系统时讨论如下的方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=x(t)[b-\sum_{j=1}^{n}a_jx(t-\tau_j)].$$

本文的定理从连续解推广到间断解，结论有更大的适用范围。

参考文献

[1] Pandit G et al., *Differential Systems Involving Impulses*, Springer-Verlag, 1982

[2] Gopalsamy K, *Quart. Appl. Math.*, 2 (1985), 189-197

[3] Kakutani S et al., *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations*, 4 (1958), 1-18

[4] Jones G S, *J. Math. Anal. Appl.*, 4 (1962), 440-469

On the Asymptotic Behavior of Solutions of Delay Logistic Equation Involving Impulses

*Xu Yuantong**

Abstract

Sufficient conditions are derived for the existence of solutions tending to steady state of a class of delay Logistic equations involving impulses. The work generalizes the results by Gopalsamy, Kakutani and Markus.

Keywords Logistic equation, asymptotic solution

* Department of Mathematics