中山大学学报（自然科学版）
第28卷 第1期，1989年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.28 No.1(1989)

中心Galois代数的基本定理

邓信德 （中山大学数学系）
司徒子治 （美国伯莱里大学数学系）

摘　要

给出具有内自同构群G，作为Galois群的C上的中心Galois代数A的所有这样的C—可分子代数T所构成的集合，这里T的换位子是投射子群代数，与G的所有子群所构成的集合之间的一一对应关系，并且还给出这些投射子群代数及其在A中的换位子的一些性质。

关键词　可分代数，Galois代数，中心Galois代数，投射群代数

1　引言

在文〔1〕中F. Demeyer已证明Galois群G，是有限内自同构群的C上中心Galois代数A是投射群代数$CG_f=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$，其中$\{U_\alpha|\alpha\in G\}$是$CG_f$的基，$\alpha(x)=U_\alpha xU_\alpha^{-1}$，$\forall x\in A$。本文将给出$G$的子群$H$与$A$中的$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$（记为$B_H$）的换位子子代数$Z_A(B_H)$之间的一一对应关系。而且当$H$是$G$的正规子群（记为$H\lhd G$），$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$是Azumaya C—代数时，则$A\cong\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha\otimes_C A^H$，且$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$和$A^H$均是$C$上中心Galois代数。当$H$有平凡中心且$(B_H)^H=C$，则$B_H$是$C$上的中心Galois代数，Galois群是$H$，且$A\cong B_H\otimes_C A^H$，其中$A^H$是Azumaya C—代数。

2　符号与定义

文中的环都是有单位元的，每个模都是么模。如果环A的子环B与A有相同的单位元，则称A是B的扩环。

关于环的可分扩张，环上的可分代数和中心可分代数（或Azumaya代数）的定义见文〔2〕。

本文1987年6月5日收到

设A是环C的扩环，G是A的一个有限自同构群，称A是C上带Galois群G的Galois扩张，如果

（i） $A^G=C$（其中$A^G=\{a\in A|\alpha(a)=a,\forall\alpha\in G\}$）；

（ii） 存在$\{a_i,b_i\in A,\ i=1,\cdots,n\}n$是正整数，使得$\sum_{i=1}^{n}a_i\alpha(b_i)=\delta_{1,\alpha}$(Kronecker δ) $\forall\alpha\in G$。这$\{a_i,b_i\in A|i=1,\cdots,n\}$称为$A$的Galois集。

A是C上的Galois扩张，如果C含于A的中心，这时称A为C上的Galois代数。特别，当C等于A的中心时，A称为C上的中心Galois代数。

设C是交换环，$U(C)$表示C中所有可逆元组成的乘法群，G是有限群，对应$f:G\times G\to U(C)$称为一个因子组，如果 $f(\alpha\beta,\gamma)f(\alpha,\beta)=f(\alpha,\beta\gamma)f(\beta,\gamma),\forall\alpha,\beta,\gamma\in G$。

一个投射群代数CG_f是一个以$\{U_\alpha|\alpha\in G\}$为基的自由C—模$\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$，其运算是：

$$kU_\alpha=U_\alpha k,\ U_\alpha U_\beta=U_{\alpha\beta}f(\alpha,\beta),\ \forall k\in C,\alpha,\beta\in G,$$ 其中$f:G\times G\to U(C)$是一个因子组。

3 正文

从现在起，A总是表示C上的中心Galois代数，Galois群是G，且G是A的有限内自同构群。则$A=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$是投射群代数[1]。

在给出基本定理之前，先证明一个引理。

引理 1 设A满足上述条件。如果H是G的子群（记为$H<G$），则$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$是$C$—可分代数。

证明 因A是C上的中心Galois代数，故A是C—所分代数[1]，由文〔1〕的引理1，G的阶$|G|$在C中是可逆的，从而$|H|$在C中亦可逆，$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$是$C$—可分代数。

定理 2 设A满足引理1的条件。则G的全部子群所构成的集合$\{H|H<G\}$与投射群代数$A(=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha)$的所有的$C$—可分子代数且其在$A$中的换位子是投射子群代数所构成的集合之间存在一一对应。

证明 $\forall H<G$，用B_H表示$\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$，以后仍采用这一符号，令

$$\theta:\{H|H<G\}\to\{T|T\text{是}A\text{的}C\text{—可分子代数},\ Z_A(T)=B_H,\ \text{某个}H<G\}$$
$$H\longmapsto A^H$$

可以验证$A^H=Z_A(B_H)$．事实上，$x\in A^H\Longleftrightarrow x\in A$，且$\beta(x)=x,\forall\beta\in H\Longleftrightarrow x\in A$且$U_\beta x=xU_\beta$，$\forall\beta\in H\Longleftrightarrow x\in Z_A(B_H)$。由引理1及Azumaya代数的换位子定理[3]，有$Z_A(A^H)=Z_A(Z_A(B_H))=B_H$，再由于$\theta(H)=A^H=Z_A(B_H)$，显然$\theta$是双射。定理2证毕。

下面给出B_H和A^H的一些性质，其中$H<G$，为此，先在G中定义等价关系如下

$\alpha\sim\gamma$当且仅当存在$\beta\in H$使得$\beta\alpha\beta^{-1}=\gamma$。则可将$G$表为互不相交的等价类的并，$G=K_1\cup\cdots\cup K_l$，对某正整数$l$，其中$K_i=\{\beta\alpha_i\beta^{-1}|\beta\in H\},K_i\neq K_j,\forall i\neq j$。

在$A=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$中，因$U_\alpha U_\beta=U_{\alpha\beta}f(\alpha,\beta)$，故由$U_1U_1=U_1f(1,1)$即得$U_1=f(1,1)\in U(C)$，又$U_\alpha U_1=U_\alpha f(\alpha,1)$得$U_1=f(\alpha,1),\forall\alpha\in G$.同理有$U_1=f(1,\alpha),\forall\alpha\in G$。所以有

$$f(1,1)=f(1,\alpha)=f(\alpha,1),\ \forall\alpha\in G.$$

容易验证　$f(\alpha^{-1},\alpha)=f(\alpha,\alpha^{-1})$，　$U_\alpha^{-1}=U_{\alpha^{-1}}f^{-1}(1,1)f^{-1}(\alpha^{-1},\alpha)$，$\forall\alpha\in G$ 所以有

$$U_\beta U_\alpha U_\beta^{-1}=U_\beta U_\alpha U_{\beta^{-1}}f^{-1}(1,1)f^{-1}(\beta^{-1},\beta)$$

$$=U_{\beta\alpha\beta^{-1}}f(\beta,\alpha\beta^{-1})f(\alpha,\beta^{-1})f^{-1}(1,1)f^{-1}(\beta^{-1},\beta),\forall\alpha,\beta\in G.$$

记　$d_{\beta\alpha\beta^{-1}}=f(\beta,\alpha\beta^{-1})f(\alpha,\beta^{-1})f^{-1}(1,1)f^{-1}(\beta^{-1},\beta)\in U(C)$，

即得　$U_\beta U_\alpha U_\beta^{-1}=d_{\beta\alpha\beta^{-1}}U_{\beta\alpha\beta^{-1}}$，$\forall\alpha,\beta\in G$。

在下面的定理及以后，均采用上述符号。

定理3　设$A=\sum_{\alpha\in G}CU_\alpha$满足引理1的条件，$H$是$G$的有平凡中心的子群。若$t_H(\sum_{\alpha\in H}U_\alpha)\in C$，这里$t_H=\sum_{\beta\in H}\beta$，则$B_H(=\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha)$是$C$上的中心Galois代数，Galois群是$H$。并且　$A\cong\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha\otimes_C A^H$，其中$A^H$是Azumaya C—代数。

证明　$|G|$在C中是可逆的[1]，从而$|H|=m$在C中亦是可逆的，对某正整数m，下面先验证B_H是C上Galois扩张，Galois群是H。首先，显然有$\alpha(B_H)=B_H$，$\forall\alpha\in H$。若$\alpha,\beta\in H$，$\alpha\neq\beta$，则它们在B_H上的限制$\alpha|B_H$和$\beta|B_H$仍不相等。事实上，若$(\alpha|B_H)=(\beta|B_H)$，则$\forall\gamma\in H$，$\alpha(U_\gamma)=\beta(U_\gamma)\Rightarrow\alpha^{-1}\beta(U_\gamma)=U_\gamma\Rightarrow U_{\alpha^{-1}\beta}U_\gamma U_{\alpha^{-1}\beta}^{-1}=U_\gamma\Rightarrow(\alpha^{-1}\beta)\gamma=\gamma(\alpha^{-1}\beta)$，即有$\alpha^{-1}\beta\in H$的中心，从而$\alpha=\beta$。所以有$|(H|B_H)|=|H|=m$。往证$\{\frac{1}{m}U_\alpha,U_\alpha^{-1},\alpha\in H\}$是$B_H$的Galois集。$\frac{1}{m}\sum_{\alpha\in H}U_\alpha U_\alpha^{-1}=1$是显然的，$\forall_\beta\neq1\in H$，$\frac{1}{m}\sum_{\alpha\in H}U_\alpha\beta(U_\alpha^{-1})=\frac{1}{m}\sum_{\alpha\in H}U_\alpha U_\beta U_\alpha^{-1}U_\beta^{-1}=\frac{1}{m}t_H(U_\beta)U_\beta^{-1}$。由假设$t_H(U_\beta)\in C$，但是$t_H(U_\beta)=\sum_{\alpha\in H}U_\alpha U_\beta U_\alpha^{-1}=\sum_{\alpha\in H}d_{\alpha\beta\alpha^{-1}}U_{\alpha\beta\alpha^{-1}}$，其中$d_{\alpha\beta\alpha^{-1}}\in C$，又因为$\beta\neq1$，故$\alpha\beta\alpha^{-1}\neq1$。所以$t_H(U_\beta)=0$。从而$\frac{1}{m}\sum_{\alpha\in H}U_\alpha\beta(U_\alpha^{-1})=0$。

其次，验证$(B_H)^H=C$。设$x=\sum_{\alpha\in H}r_\alpha U_\alpha\in(B_H)^H$，则$\forall\beta\in H$，$\beta(x)=x\Rightarrow\beta(\sum_{\alpha\in H}r_\alpha U_\alpha)=x\Rightarrow\sum_{\alpha\in H}r_\alpha\beta(U_\alpha)=x$故有$\sum_{\beta\in H}(\sum_{\alpha\in H}r_\alpha\beta(U_\alpha))=mx$，即有$\sum_{\alpha\in H}r_\alpha t_H(U_\alpha)=mx$。因为$\forall\alpha\neq1\in H$，$t_H(U_\alpha)=0$，所以　$mx=\sum_{\alpha\in H}r_\alpha t_H(U_\alpha)=r_1t_H(U_1)=r_1\sum_{\alpha\in H}\alpha(U_1)=r_1\sum_{\alpha\in H}U_\alpha U_1U_\alpha^{-1}=r_1f(\alpha,1)\sum_{\alpha\in H}U_\alpha U_\alpha^{-1}=r_1f(\alpha,1)m$。

由于m在C中是可逆的，故有

$$x=r_1f(\alpha,1)\in C.$$

因而$(B_H)^H\subseteq C$，从而$(B_H)^H=C$。所以，B_H是C上Galois扩张，Galois群是H。

最后，验证$Z_{B_H}(B_H)=C$。事实上，如果$x\in Z_{B_H}(B_H)$，则$\forall\beta\in H$，$U_\beta x=xU_\beta\Rightarrow U_\beta xU_\beta^{-1}=x\Rightarrow\beta(x)=x$。所以$x\in C$。故有$Z_{B_H}(B_H)\subseteq C$。从而$Z_{B_H}(B_H)=C$。所以，$B_H$是

C 上中心Galois扩张，Galois群是H。

因$Z_A(B_H)=A^H$，由换位子定理，$A\cong B_H\otimes_C A^H$，其中A^H是Azumaya C—代数。定理3证毕。

由这定理，显然有

推论 4　设$A=\sum\limits_{\alpha\in G}CU_\alpha$满足引理1的条件。若$H$是$G$的有平凡中心的子群，且$(B_H)^H=C$。则$B_H$是$C$上中心Galois代数。

定理 5　设$A=\sum\limits_{\alpha\in G}CU_\alpha$满足引理1的条件，$H<G$，$G=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_l$，对某正整数$l$，其中$K_i=\{\beta\alpha_i\beta^{-1}\mid\beta\in H\}$，$K_i\neq K_j$，$\forall\, i\neq j$。则

$$x\in A^H\Longleftrightarrow x=\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\lambda\in K_i}d_\lambda U_\lambda,\ \text{其中 } r_i\in C,\ \lambda=\beta\alpha_i\beta^{-1},\ U_\beta U_{\alpha_i}U_\beta^{-1}=d_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}U_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}.$$

证明　因$A^H=\{x=\sum\limits_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\in A\mid\beta(x)=x,\forall\beta\in H\}$，所以，若$x=\sum\limits_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\in A^H$，则

$$\forall\beta\in H,\beta\Big(\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\Big)=\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\Rightarrow\sum_{\alpha\in G}r_\alpha\beta(U_\alpha)=\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\Rightarrow\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\beta U_\alpha U_\beta^{-1}=\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha\Rightarrow$$

$$\sum_{\alpha\in G}r_\alpha d_{\beta\alpha\beta^{-1}}U_{\beta\alpha\beta^{-1}}=\sum_{\alpha\in G}r_\alpha U_\alpha,\qquad\text{所以}$$

$$r_{\beta\alpha\beta^{-1}}=r_\alpha d_{\beta\alpha\beta^{-1}},\ \forall\beta\in H,\alpha\in G.$$

从而
$$x=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\beta\in H}r_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}U_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{\beta\in H}r_{\alpha_i}d_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}U_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}=\sum_{i=1}^{l}r_{\alpha_i}\sum_{\lambda\in K_i}d_\lambda U_\lambda.$$

反之，若$x=\sum\limits_{i=1}^{l}r_i\sum\limits_{\lambda\in K_i}d_\lambda U_\lambda$，其中$r_i\in C$，$\lambda=\beta\alpha_i\beta^{-1}$，$U_\beta U_{\alpha_i}U_\beta^{-1}=d_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}U_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}$，则

$$\begin{aligned}\forall\mu\in H,\ \mu(x)&=\mu\Big(\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\lambda\in K_i}d_\lambda U_\lambda\Big)=\mu\Big(\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\beta\in H}d_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}U_{\beta\alpha_i\beta^{-1}}\Big)\\&=\mu\Big(\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\beta\in H}U_\beta U_{\alpha_i}U_\beta^{-1}\Big)=\mu\Big(\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\beta\in H}\beta(U_{\alpha_i})\Big)\\&=\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\beta\in H}\mu\beta(U_{\alpha_i})=\sum_{i=1}^{l}r_i\sum_{\beta\in H}\beta(U_{\alpha_i})=x.\end{aligned}$$

故有$x\in A^H$。定理5证毕。

由文[4]有

引理 6　设A'是B上的Galois扩张，Galois群是G'，且右B—模B是A'的直和项，则存在$d\in A'$，使得$t_{G'}(d)=1$，其中$t_{G'}=\sum\limits_{\alpha\in G'}\alpha$。

定理 7　设$A=\sum\limits_{\alpha\in G}CU_\alpha$满足引理1的条件。如果$H\lhd G$，则$A^H$是$C$上的Galois扩张，Galois群是$G/H$。

证明　因$H\lhd G$，易见G/H是A^H的C—自同构群，其中$\forall\alpha H\in G/H$，$x\in A^H$，$\alpha H(x)=$

$\alpha(x)$。因A是C的中心Galois扩张，故A是Azumaya C—代数。从而C是A的C—直和项[3]。故存在$a\in A$，使得$t_G(a)=1$(引理6)。设$G=\bigcup_{i=1}^{k}H\alpha_i$是$G$的关于$H$的右陪集分解。令$b=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(a)$，则$t_H(b)=\sum_{\beta\in H}\beta\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(a)\right)=\sum_{\alpha\in G}\alpha(a)=t_G(a)=1$。再令$x_i=t_H(a_i)$，$y_i=t_H(b_ib)$，$i=1,\cdots,n$，其中$\{a_i,b_i,i=1,\cdots,n\}$是$A$的Galois集。则易见$\{x_i,y_i,i=1,\cdots,n\}$是$A^H$的Galois集。事实上，显然$x_iy_i\in A^H$，$i=1,\cdots,n$，并且

$$\forall\alpha H\in G/H,\quad \sum_{i=1}^{n}x_i\,\alpha H(y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\alpha(y_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta,\gamma\in H}\beta(a_i)\alpha\gamma(b_ib)=$$

$$\sum_{\beta,\gamma\in H}\left(\beta\sum_{i=1}^{n}a_i(\beta^{-1}\alpha\gamma)(b_i)\right)\alpha\gamma(b)=\begin{cases}0, & 当\ \alpha H\neq H\\ 1, & 当\ \alpha H=H.\end{cases}\qquad 显然(A^H)^{G/H}=C。$$

所以，A^H是C上的Galois扩张，Galois群是G/H。

当$H\lhd G$时，我们还有

定理8　设$A=\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$满足引理1的条件。如果$H\lhd G$且$B_H=\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$是Azumaya C—代数，则$A\cong B_H\otimes_C A^H$且B_H和A^H均是C上中心Galois扩张，Galois群分别是H和G/H。

证明　因B_H是Azumaya C—代数，由换位子定理，$A\cong B_H\otimes_C A^H$(C—代数同构)且A^H是Azumaya C—代数。从而由定理7，A^H是C上中心Galois代数，Galois群是G/H。最后，显然$B_H=\sum_{\alpha\in H}CU_\alpha$是$C$上中心Galois代数[1]。

参 考 文 献

〔1〕 F. Demeyer, *IL. J. Math.*, 10 (1966), 287—295

〔2〕 邓信德、司徒子治，中山大学学报(自然科学)论丛〔10〕，1987，66—71

〔3〕 F. Demeyer and E. Ingraham, *Lecture notes in Math.*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 181, (1971)

〔4〕 Y. Miyashita, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. ser. I*, 19 (1966), 114—134

〔5〕 F. Demeyer, Osaka *J. Math.*, 2 (1965), 117—127

〔6〕 马麟凌、司徒子治，中山大学学报(自然科学版)，1984，4，10—16

〔7〕 G. Szeto and Y. F. Wong, *J. Austral Math. soc.* (*series A*) 34 (1983), 394—398

The Fundamental Theorem For Central Galois Algebras

Deng Xinde　　George Szeto*

Abstract

Let A be a central Galois algebra with Galois group G which are inner automorphisms induced by elements in A, and C the center of A. Then a one-to-one correspondence between the following sets is given: (1) { T|T is a separable subalgebra of A over C such that the commutant of T in A is a projective group algebra }, and (2) { H|H is a subgroup of G }. Also, some properties of projective group subalgebras and their commutants are proved.

Keywords separable algebra, Galois algebra, central Galois algebra, projective group of algebra

·简讯·

中山大学力学专业创办30年

中山大学应用力学与工程系的前身为数学力学系的力学专业，创办于1958年。1988年12月17日，全系师生员工和150多位校友隆重集会庆祝。人们殷切期望通过认真总结30年来的办学经验，深化教育改革，加强工程应用，走出一条理工结合、多层次办学的新路子。

力学专业成立后，在加强基础理论研究的同时，结合广东实际，注重工程应用研究。30年来，培养了近千名毕业生和研究生，有的已成为专家教授。教师发表学术论文近200篇，8项科研成果获得国家级自然科学奖、科技进步奖等。完成了广东沙角电厂温排水热扩散数值模拟以及海洋工程结构物波浪荷载、直升飞机旋翼、船坞码头、机场跑道等结构分析计算，建成了风洞、水力学、固体力学等实验室和大型水池试验室，完成了大批生产试验任务，跟国外和港澳地区的学术交流活动也十分活跃。

近年又新办了培养市政建设的设计、施工和管理人才的城镇建设工程专业，初步形成理工结合多层次办学的格局。今后将坚持发扬理论研究上的优势，在一些新的领域开创新局面，坚持为工程技术服务，在工程界找到结合点、结合面，从日新月异的工程技术中吸取发展的源泉。 （黄 海）

* Department of Mathematics