第28卷 第2期 1989年

中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI

Vol.28 No.2 1989

矩形域上的体积匹配样条

黎罗罗

(计算机科学系)

摘 要

讨论矩形域上的一类体积匹配问题，导出其解函数的特征性质、存在唯一性及构造，它是具有特定最佳逼近性质的双二次混合样条.

关键词 体积匹配，样条函数，变分法

文[1]及李岳生另文[1)]，从变分观点分别研究了双奇次混合样条和双调和样条，它们具有可贵的变分性质和最佳逼近性质. 本文从体积匹配问题入手，讨论具有类似性质的偶次(双二次)混合样条.

设有 $x-y$ 平面上的矩形域 $R=(a,b)\times(c,d)$ 及其分划 $\pi=\pi_1\times\pi_2=\{(x_i,y_j)\}$，其中

$$\pi_1=\{x_i\}:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{M+1}=b$$

$$\pi_2=\{y_j\}:\ c=y_0<y_1<\cdots<y_{N+1}=d$$

记 子矩形 $R_{ij}=(x_i,x_{i+1})\times(y_j,y_{j+1})$ 及 $\Delta_1=b-a,\Delta_2=d-c$.

体积匹配问题(VM)是指：求函数 $S(x,y)\in H^{1,1}(R)\cap\Gamma$，极小化如下泛函 $J(w)$

$$\frac{1}{2}\iint_R[w^{(1,1)}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\left\{\int_a^d[w^{(1,0)}(x,c+k\Delta_2)]^2\mathrm{d}x+\int_c^d[w^{(0,1)}(a+k\Delta_1,y)]^2\mathrm{d}y\right\} \tag{1}$$

其中集合 $\Gamma=\Gamma_P\cap\Gamma_B\cap\Gamma_V$ 用以刻划函数在 R 的角点、边界及子矩形上的匹配条件:

$$\Gamma_P=\{w(x,y):w(\xi,\eta)=\gamma_{\xi\eta},\ \xi=a,b;\eta=c,d\}$$

$$\Gamma_B=\left\{w(x,y):\int_{y_j}^{y_{j+1}}w(\xi,y)\mathrm{d}y=p_{\xi j},\xi=a,b;\ j=0,1,\cdots,N;\ \int_{x_i}^{x_{i+1}}w(x,\eta)\mathrm{d}x=p_{\eta i};\ \eta=c,d;\ i=0,1,\cdots;M\right\}$$

$$\Gamma_V=\left\{w(x,y):\iint_{R_{ij}}w(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=q_{ij},\ i=0,1,\cdots,M;j=0,1,\cdots,N\right\}$$

$r_{\xi\eta}$、p_{η_i}、$p_{\xi j}$ 及 q_{ij} 是给定数据. 相应的齐匹配条件用 Γ_p^0、Γ_B^0、Γ_V^0 表示，$\Gamma^0=\Gamma_p^0\cap$

本文1987年11月17日收到

1) 李岳生，圆域上双调和函数插值和多点支承薄板集中应力计算方法(待发表)

$\Gamma_B^0\cap\Gamma_V^0$. 在$H^{1,1}(R)\cap\Gamma^0$中极小化$J(w)$的问题记为(VM_0).

文内其它记号同文〔1〕. 特别地$w^{(m,n)}$表示$\partial^{m+n}w/\partial x^m\partial y^n$；理解$f^{(-1)}(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，$g^{(-1)}(y)=\int_c^y g(s)\mathrm{d}s$；另外用$[f(\cdot)]_{x_i}$表示$f(x)$在点$x_i$的跳跃量$f(x_i+0)-f(x_i-0)$. 类似地规定$[g(\cdot)]_{y_j}$，而

$$[w(\cdot,\cdot)]_{x_iy_j}=[w(x_i+0,\cdot)]_{y_j}-[w(x_i-0,\cdot)]_{y_j}$$

用到这些跳跃量记号时，规定w在$\bar{R}$外的值为0.

定理1 (VM)的解$S(x,y)$在子矩形、内网格线、内网格点及边界点上的特征性质如下：

1) $S^{(3,3)}(x,y)=0\quad (x,y)\in R_{ij},\ i=0,1,\cdots,M;\ j=0,1,\cdots,N$
2) 对$i=1,2,\cdots,M$；$\mu=-1,0$有 $[S^{(1-\mu,3)}(\cdot,y)]_{x_i}=0,\quad y\in[c,d]\backslash\pi_2$
3) 对$j=1,2,\cdots,N$；$\nu=-1,0$有 $[S^{(3,1-\nu)}(x,\cdot)]_{y_j}=0,\quad x\in[a,b]\backslash\pi_1$
4) 对$i=1,2,\cdots,M$；$j=1,2,\cdots,N$及$(\mu,\nu)=(0,0)$、$(0,-1)$及$(-1,0)$有 $[S^{(1-\mu,1-\nu)}(\cdot,\cdot)]_{x_iy_j}=0$
5) 对$\xi=a,b$ 有 $S^{(0,3)}(\xi,y)-S^{(1,3)}(\xi,y)=0\quad y\in[c,d]\backslash\pi_2$
6) $S^{(2,3)}(b,y)=0,\quad y\in[c,d]\backslash\pi_2$
7) 对$\eta=c,d$有 $S^{(3,0)}(x,\eta)-S^{(3,1)}(x,\eta)=0,\quad x\in[a,b]\backslash\pi_1$
8) $S^{(3,2)}(x,d)=0,\quad x\in[a,b]\backslash\pi_1$
9) 对$\xi=a,b$；$j=1,2,\cdots,N$ 有 $[S^{(1,1)}(\xi,\cdot)]_{y_j}-[S^{(0,1)}(\xi,\cdot)]_{y_j}=0$
10) $[S^{(2,1)}(b,\cdot)]_{y_j}=0,\ j=1,2,\cdots,N$
11) 对$\eta=c,d$；$i=1,2,\cdots,M$ 有 $[S^{(1,1)}(\cdot,\eta)]_{x_i}-[S^{(1,0)}(\cdot,\eta)]_{x_i}=0$
12) $[S^{(1,2)}(\cdot,d)]_{x_i}=0,\ i=1,2,\cdots,M,$

证明 将广义拉氏恒等式（见文〔2〕第1章）推广用于分部积分计算双线性型

$$a(w,v)=\iint_R w^{(1,1)}v^{(1,1)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\sum_{k=0}^{1}\int_a^b(w^{(1,0)}\cdot v^{(1,0)})(x,c+k\Delta_2)\mathrm{d}x$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\int_c^d(w^{(0,1)}\cdot v^{(0,1)})(a+k\Delta_1,y)\mathrm{d}y$$

至被积分项中出现$v^{(-1,-1)}$、$v^{(0,-1)}$或$v^{(-1,0)}$. 整理所得各项，可逐一验证1)～12)正是变分问题(VM)的广义欧拉方程

$$a(S,\delta S)=0\qquad \forall\delta S\in H^{1,1}(R)\cap\Gamma^0$$

的特征性质，从而是(VM)的解的特征性质.

记$N_0=\{w(x,y):w(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(g_i(y)\phi_i(x)+f_i(x)\phi_i(y))\}$，其中$g_i\in H^1(c,d)\cap C^3([c,d]\backslash\pi_2)$，$f_i\in H^1(a,b)\cap C^3([a,b]\backslash\pi_1)$，而$\{\phi_i\}_1^3$、$\{\psi_i\}_1^3$分别张成$[a,b]$、$[c,d]$上的

二次多项式函数空间。

定义1　具有如下形式的函数之全体记为 $S_p(D_x^3 D_y^3,\pi)$：

$$S(x,y)=\hat{S}(x,y)+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\frac{(x-x_i)_+^2}{2}\cdot\frac{(y-y_j)_+^2}{2} \tag{2}$$

其中 $\hat{S}\in N_0$，C_{ij} 为常数。记 $S_p(D_x^3 D_y^3,\pi)$ 中满足条件5）～12）的函数之全体为 $S_p^0(D_x^3 D_y^3,\pi)$。

定理2　若 (VM) 有解 $S(x,y)$，则必可表示为

$$S(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(g_i(y)\phi_i(x)+f_i(x)\psi_i(y))+\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\frac{(x-x_i)_+^2}{2}\cdot\frac{(y-y_j)_+^2}{2} \tag{3}$$

而且，式（3）中 $g_i\in S_p(D_y^3,\pi_2)$：$[c,d]$ 上以 π_2 为单结点的二次样条函数集合；类似地，$f_i\in S_p(D_x^3,\pi_1)$。于是，（3）为二次混合样条。

证明　由特征性质1）、4）得到 S 的形式（3）；由性质5）、6）可推知 g_i 为分段二次多项式，由 $S\in H^{1,1}(R)$ 及性质9）、10）可推知 $g_i\in C^1(c,d)$，即 g_i 为单结点二次样条。同法讨论 f_i。

不失一般性，以下选定二次多项式 $\phi_i,\psi_i\ (i=1,2,3)$ 使得 $\lambda_j(\phi_i)=\mu_j(\psi_i)=\delta_{ij}\ (i,j=1,2,3)$ 其中泛函 $\lambda_1 f=f(a+0)$，$\lambda_2 f=f(b-0)$，$\lambda_3 f=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；$\mu_1 g=g(c+0)$，$\mu_2 g=g(d-0)$，$\mu_3 g=\int_c^d g(y)\mathrm{d}y$；$\delta_{ij}$ 是 Kronecker 记号。

引理1　若 $S(x,y)$ 是 (VM) 的解，则

$$S(\xi,y)\in S_p(D_y^3,\pi_2),\quad S(x,\eta)\in S_p(D_x^3,\pi_1),\quad \xi=a,b;\ \eta=c,d \tag{4}$$

$$F(x)\equiv\int_c^d S(x,y)\mathrm{d}y\in S_p(D_x^3,\pi_1) \tag{5}$$

$$G(y)\equiv\int_a^b S(x,y)\mathrm{d}x\in S_p(D_y^3,\pi_2) \tag{6}$$

（4）—（6）式中单变量函数可由匹配条件 Γ 唯一确定。

证明　由式（3）导得。由匹配条件唯一确定的性质是根据带积分条件的逼近理论[2]特别地其中 $F(x)$ 由条件 $F(\xi)=\int_c^d S(\xi,y)\mathrm{d}y$ 及 $\int_a^{x_i}F(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{N}q_{kl}$ 唯一确定。同理讨论 $G(y)$。

定理3　若 (VM) 有解，则必唯一。

证明　只须证明问题 (VM_0) 只有恒零解。事实上，由引理1知 (VM_0) 的解 S_0 在 R 的边界恒零，于是 $J(S_0)=\frac{1}{2}\iint_R[S_0^{(1,1)}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，故 S_0 分片地有形式 $f(x)+g(y)$，计及 S_0 的连续性知 S_0 在 R 上恒零。

以I_1, I_2记逼近算子$I_1 f = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i f)\phi_i$，$I_2 g = \sum_{i=1}^{3} (\mu_i g)\phi_i$，逼近余项分别记为 $R_1 f \equiv f - I_1 f$，$R_2 g \equiv g - I_2 g$，用 I 记 I_1 与 I_2 的布尔和型逼近算子：$I = I_1 \oplus I_2$。

因为$IS = (I_1 + R_1 I_2)S$，所以如果 $\lambda_i S \epsilon H^1(c,d) \cap c^3([c,d]\backslash\pi_2)$，$\mu_i S \epsilon H^1(a,b) \cap c^3([a,b]\backslash\pi_1)$，则 IS 唯一存在于N_0：

$$(IS)(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i S(\cdot, y)\phi_i(x) + \sum_{i=1}^{3} R_1\{\mu_i S(x,\cdot)\}\phi_i(y) \tag{7}$$

于是由定理2，(VM)的解若存在，则必可表如

$$S(x,y) = \hat{s}(x,y) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} R_1\{\frac{1}{2}(x-x_i)_+^2\} R_2\{\frac{1}{2}(y-y_j)_+^2\} \tag{8}$$

其中 $\hat{s}\epsilon N_0$，注意 $IS = I\hat{s}$及$\hat{s}\epsilon N_0$，故立知 $I\hat{s} = \hat{s}$ 及

$$S(x,y) = (IS)(x,y) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} R_1\{\frac{1}{2}(x-x_i)_+^2\} R_2\{\frac{1}{2}(y-y_j)_+^2\} \tag{9}$$

由式(7)及引理1，IS 由条件Γ 唯一确定，因此，(VM)解的存在性取决于存在$\{c_{ij}\}$使(9)在 $R_{kl}(k=0,1,\cdots,M-1;\ l=0,1,\cdots,N-1)$上体积匹配（因若如此，由引理1的证明，(9)必满足在 R_{Mj}, R_{iN}, $i=0,1,\cdots,M$; $j=0,1,\cdots,N$ 上的匹配条件）。这又等价于要求下述线性方程组可解：

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \iint_{R_{kl}} R_1\{\frac{1}{2}(x-x_i)_+^2\} R_2\{\frac{1}{2}(y-y_j)_+^2\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = q_{kl} - \iint_{R_{kl}} IS\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$k=0,1,\cdots,M-1;\ l=0,1,\cdots,N-1 \tag{10}$$

这是关于 $M\times N$ 个未知量的 $M\times N$ 个方程，其解的存在性已寓于相应齐问题的唯一性之中。故有

定理4 (VM)的解存在，可归结为求解方程组(10)。

定理5 设$\sigma\epsilon S_p^0(D_x^3 D_y^3, \pi)$，$S$ 是(VM)的解，$v\epsilon H^{1,1}(R)\cap\Gamma$，则有

$J(v-\sigma) = J(v-S) + J(S-\sigma)$

$J(S) \leqslant J(v)$ （最小模性质）

$J(v-S) \leqslant J(v-\sigma)$ （最佳逼近性质）

证明 由 $J(v-\sigma) = J(\sigma - S) + J(v-S) + a(S-\sigma, v-S)$知。

参考文献

〔1〕 Li Yuesheng (李岳生), *Multivariate Optimal Interpolation to Scattered Data througout A Rectangle* Ⅰ&Ⅱ (1984) CAT# 55 &# 56

〔2〕 李岳生，样条与插值，上海科技出版社，1983

Volume-Matching Splines on a Rectangle

*Li Luoluo**

Abstract

A Class of volume-matching splines on a rectangle is introduced. Existence, uniqueness, characteristics and structure of the solutions are given.

Keywords volume-matching problem, spline, variation

·简讯·

中国高校自然科学学报文摘国际联机检索成功

1989年2月1日下午，中国高校自然科学学报英文文摘磁带版(CUJA)研制中心通过设在清华大学的国际终端成功地和美国Dialog国际情报检索系统的电子计算机数据库进行了首次CUJA文档的国际联机检索试验。试验证明：CUJA磁带符合国际机读文献信息交换标准，达到了在国际大型文献检索系统中建库和检索的实用要求。现在，在Dialog数据库中，已经建立了一个CUJA数据库文档，包括有16921条中国高校自然科学学报研究论文数据记录。这是中国第一个在世界上最大的科技情报检索服务公司Dialog系统建立的数据库。这一数据库的建立标志着中国300多所高校自然科学学报的最新文献将通过CUJA磁带源源不断地输入到Dialog情报检索系统，为全世界的科技人员了解和利用。

中山大学是CUJA组织系统14个发起单位之一。自1984年以来，我校学报自然科学版已有近400篇论文的英文文摘制成了工作单，通过CUJA中心输入磁带，并将分批进入Dialog情报检索系统。1989年起，CUJA中心将按照与美国Dialog公司的协议，按月寄送1000条文献数据。

（蓝崇钰供稿）

* Department of Computer Science