第28卷 中山大学学报（自然科学版） Vol.28
第1期，1989年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI №.1(1989)

支承方式对引力波天线本征频率影响的研究

郑庆璋
（物理学系）

摘 要

讨论了在软支承、尤其在悬挂支承的情况下，支承对本征频率的影响。从波动方程出发，导出频率改变的一级近似公式。结果表明，在某些条件下这种影响可以忽略。

关键词 引力波，天线，本征频率

为了克服地球重力对引力波天线的影响，在天线工作时必须采用适当的方式支承。理想的支承点当然是天线振动的节点，因为这样不会影响天线的本征频率和它的Q值。但由于种种原因，例如出于稳定性和操作方便的考虑，有时不得不让支承点偏离节点[1,2]，因而就必须考虑支承点所引起的一些效应。

支承方式可以分为硬支承和软支承两类。所谓硬支承，是指完全不让天线中被支承的点运动，这实质上是使支承点成为新的节点，因而也就完全改变了天线的本征振动。如果支承方式容许天线中的被支承点在一定的条件下运动，这就是所谓的软支承。绝大多数实际情况都是软支承，被支承的点按一定方式运动的这一条件便构成了天线位移场的附加边界条件。这一方面使天线的本征频率受到一定的影响，同时也会影响天线系统的Q值[3]。本文着重研究在悬挂支承方式的情况下，支承对捧状天线本征频率的影响。

设棒状圆柱体天线的质量为M，长度为$2L$，悬点间的距离为$2a$，悬索的长度为l（图1）。若在t时刻天线上离质心O为x的一点P的位移为$\xi(x,t)$，则以它为悬挂点时，它所受的恢复力（参看图2）为

$$F=-\frac{1}{2}Mg\,\mathrm{tg}\,\theta\simeq-\frac{1}{2}Mg\xi(x,t)/l$$

这力作用在P点附近的一个很小的区域内，按圣维南原理[4]，可以把它考虑作一个δ函

本文1988年3月31日收到

数，因而可以认为作用在天线悬挂点$P_1(x=a)$附近的等效力密度为

$$f_1 = F\delta(x-a)/\rho = -\omega_g^2 L\xi(x,t)\delta(x-a) \tag{1}$$

其中$\rho = M/2L$为天线的线密度，$\omega_g = \sqrt{g/l}$为悬索的等摆长单摆的圆频率。

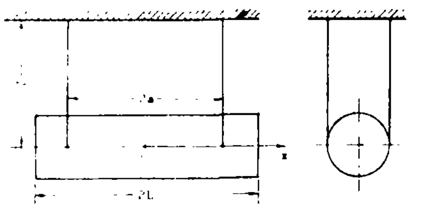

图1　用悬挂方式支承的圆柱体天线

Fig. 1 The cylindrical antenna supported with suspending formalism

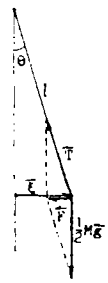

图2　作用在悬挂点上的恢复力

Fig. 2 The restoring force applied at supported point

同样，可得作用在天线上另一端上的力密度为

$$f_2 = -\omega_g^2 L\xi(x,t)\delta(x+a) \tag{2}$$

于是天线的波动方程为[4]

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\omega_g^2 L\xi(x,t)[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \tag{3}$$

式中c为天线中声波的传播速度。

利用分离变量法求（3）式的解。令$\xi(x,t)=u(x)V(t)$，代入（3）式化简后得

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2}u = (\omega_g^2/c^2)Lu(x)[\delta(x-a)+\delta(x+a)] \tag{4}$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \omega^2V = 0 \tag{5}$$

其中ω^2为与x,t无关的常数。显然，由典型的谐振动方程（5）式可知，ω的物理意义为天线振动的本征（圆）频率。

下面我们通过求解（4）式来确定本征频率ω可能取的值。

引入波矢$\vec{k}$，令$k^2=\omega^2/c^2$，$k_g^2=\omega_0^2/c^2$；注意到引力波天线质量分布的几何对称性，对质心坐标系动量守恒，且$u(-x)=-u(x)$。换句话说，我们只需求$u(x)$在$x\geqslant0$的解便可。在此情况下，（4）式化为

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = k_g^2 L\,u(x)\delta(x-a), \quad (x\geqslant0) \tag{6}$$

微分方程（6）除了在$x=a$处出现奇点外，在$(0\leqslant x<a)$和$(a<x\leqslant L)$区间内为一典型的谐振动方程

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2u = 0, \quad (在0\leqslant x<a和a<x\leqslant L区间内) \tag{7}$$

因此有特解

$$u_1(x)=A_1\cos kx+B_1\sin kx,\quad (0\leqslant x<a) \tag{8}$$

$$u_2(x)=A_2\cos kx+B_2\sin kx,\quad (a<x\leqslant L) \tag{9}$$

现在考虑(6)式的解所应满足的边界条件。

1)　首先由 $u(-x)=-u(x)$ 可知，在 $x=0$ 处，

$$u_1(0)=0 \tag{10}$$

2)　其次由天线的自由端应变为零有

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}=0 \tag{11}$$

3)　在奇点 $x=a$ 上，$u(x)$ 应是连续的（因天线始终都是连续介质），即

$$u_2(a)=u_1(a) \tag{12}$$

4)　最后一个边界条件可通过(6)式从 $x=a-\epsilon$ 对 x 积分至 $x=a+\epsilon$（ϵ 为无穷小量）求得：

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a+\epsilon}-\left.\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a-\epsilon}=k_g^2L\,u(a) \tag{13}$$

上式表明，应变在 a 点是不连续的，这正是由于在 a 点有附加的外力作用的缘故。

由(8)、(10)两式得 $A_1=0$、即 $u_1(x)=B_1\sin kx$。把它及(9)式代入(11)、(12)和(13)式中，得

$$\begin{cases}A_2\sin kL-B_2\cos kL=0\\ A_2\cos ka+B_2\sin ka-B_1\sin ka=0\\ A_2\sin ka-B_2\cos ka+B_1[\cos ka+(k_g^2/k)L\sin ka]=0\end{cases} \tag{14}$$

(14)式为 A_2，B_2，B_1 的线性齐次方程组，有非零解的必要条件为其系数行列式等于零：

$$\begin{vmatrix}\sin kL & -\cos kL & 0\\ \cos ka & \sin ka & -\sin ka\\ \sin ka & -\cos ka & [\cos ka+(k_g^2/k)L\sin ka]\end{vmatrix}=0$$

化简后得

$$\cos kL+(k_g^2/k)L\sin ka\cos k(L-a)=0 \tag{15}$$

上式是 k 的超越方程，不易求精确解。但若 $(k_g^2/k)L\ll 1$，则可求其近似解。

首先忽略(15)式左边第二项，即得零级近似解：

$$\cos k_0L=0\ ,$$

$$k_0=(2n+1)\frac{\pi}{2L},\qquad n=0,1,2,\cdots \tag{16}$$

设(15)式的1级近似解为 $k_1=k_0+\Delta k_1$，则

$$\cos(k_0+\Delta k_1)+(k_g^2/k_0)L\sin k_0a\cos k_0(L-a)=0$$

注意到 $\cos k_0L=0$，$\sin k_0L=1$，$\sin\Delta k_1L\simeq\Delta k_1L$，得

$$-\Delta k_1L+(k_g^2/k_0)L\sin^2k_0a=0$$

$$k_1=k_0[1+(k_g^2/k_0^2)\sin^2 k_0 a] \tag{17}$$

以 $k=\omega/c$ 及 $k_g=\omega_g/c$ 代入，得天线振动的本征频率

$$\omega\simeq\omega_1=\omega_0[1+(\omega_g^2/\omega_0^2)\sin(\omega_0/c)a] \tag{18}$$

其中 $\omega_0=ck_0=(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{c}{L}$，$(n=0,1,2,\cdots)$，为天线自由振动或支承点与节点重合时天线的本征(圆)频率。对于基模的情况，$n=0$，$k_0=\frac{\pi}{2L}$，$\omega_0=\frac{\pi}{2}\frac{c}{L}$；于是(18)式化为

$$\omega\simeq\omega_0[1+(\omega_g^2/\omega_0^2)\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{a}{L}] \tag{19}$$

以 $l\approx1\mathrm{m}$，$g\approx10\mathrm{m\cdot sec^{-2}}$，$\omega_0\approx2\pi\times10^3\mathrm{sec^{-1}}$ 为例代入(19)式，则由悬挂支承引起的天线本征频率的改变率为

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0}=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_0}=(\omega_g^2\Big/\omega_0^2)\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{a}{L}\approx\frac{10}{(2\pi\times10^3)^2}\sin^2\frac{\pi}{2}\frac{a}{L}\approx10^{-7}$$

这是一个微不足道的改变。事实上，Stanford 的情况[1]正好说明这一点。至于马里兰的情况[2]，(19)式中的 ω_g 即为其支承小柱体的横向振动本征频率 ω_e，在一定的合理条件下，仍然有 $\omega_0\gg\omega_e$，即支承所引起的频率改变仍是可以忽略的。

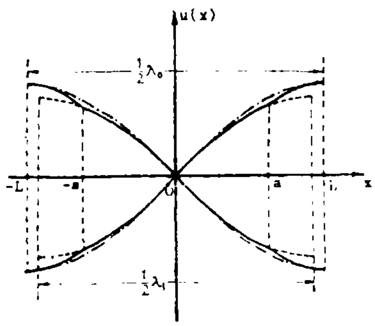

图3　天线振动的振幅包络示意图
Fig. 3　A scheme of envelope of the antenna vibration

最后还应指出，由于波长 $\lambda=2\pi/k$，从(17)式可知，在此情况下波长稍为变短。对于基模的情况，天线振动的振幅包络如图3所示意。图中的点划线表示天线自由振动或理想支承时的振幅包络，而实线则为在悬挂支承情况下的振幅包络。

参考文献

〔1〕Bassan M. et al., *Proc. of the 3rd M. Grossmann Meeting on G. R.*, North-Holland Pub. Comp., 1983, 667

〔2〕Davis W. S. et al., *Proc. of the 3rd M. Grossmann Meeting on G. R.*, North-Holland Pub. Comp., 1983, 1433

〔3〕郑庆璋，中山大学学报（自然科学版），1987，4，99

〔4〕徐芝纶，弹性力学（上册，第二版），人民教育出版社，1982，25和382

Research on Influence of Supporting Formalism upon the Eigen Frequency of Gravitational Waves Antenna

*Zheng Qingzhang**

Abstract

A suitable support must be used to offset gravity when a gravitational waves antenna is operating. If the supported points deviate from the perfect points——nodes, a change of eigen frequency of the antenna will be caused. In this paper, the influence of soft support on the eigen frequency has been discussed, especially in the case of suspending formalism. A formula of the frequency change has been deduced from the wave equation to the first order approximation. The result shows that this influence can be ignored under certain conditions.

Keywords gravitational wave, antenna, eigen frequency

* Department of Physics