

# 次最优二阶状态空间数字滤波器的误差谱成形

曾小林\* 陈钧量

(无线电电子学系)

## 摘要

导出单位噪声增益的计算公式,用统计和最优化方法表明9种误差谱成形结构的降噪性能,给出5条等降噪性能曲线。对窄带滤波,新结构可降低噪声10—30dB,降噪性能对滤波器的零点不敏感。新结构的舍入噪声比原来次最优二阶线性状态空间滤波器的并联实现结构降低12—28dB,且带宽愈窄,降噪效果愈佳。

**关键词** 数字滤波器,误差谱成形,单位噪声增益

由于寄存器有限长度效应,窄带递归型数字滤波器将出现很大的运算误差。为降低这些误差,人们提出了线性状态空间(LSS)实现<sup>[1]</sup>和误差谱成形(ESS)结构<sup>[2]</sup>两种类型。前者包括最优二阶正交滤波器<sup>[3]</sup>、最优二阶LSS结构<sup>[4]</sup>、次最优二阶LSS结构<sup>[5]</sup>和高效计算低舍入噪声二阶LSS结构<sup>[6]</sup>。后者已成功地应用于定点递归型滤波器的直接型实现<sup>[7]</sup>。本文讨论次最优二阶LSS数字滤波器加入误差反馈后系统的输出噪声,探讨简单一阶和二阶误差反馈后系统的降噪性能。对高阶窄带椭圆滤波器,给出新结构并联实现的降噪例子,并指出新结构的优点。

## 1 次最优二阶LSS数字滤波器的误差谱成形

### 1.1 次最优二阶LSS数字滤波器

设实现二阶传递函数

$$H(Z) = \alpha / (z - \lambda) + \alpha^* / (z - \lambda^*) \quad (1)$$

式中  $\lambda = \sigma + j\omega$ ,  $\alpha = \alpha_1 + ja_2$ , 标号\*为复共轭。

二阶LSS滤波器可用下列状态方程和输出方程表示

$$x(n+1) = A x(n) + B u(n) \quad (2)$$

$$y(n) = C x(n) \quad (3)$$

式中A, B和C是实数矩阵

本文1988年6月1日收到

\* 1987届硕士研究生

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad C = [c_1 \ c_2]$$

在 $l_2$ 尺度约束下, 最优二阶LSS实现的充要条件为<sup>[4]</sup>

$$a_{11} = a_{22} \tag{4a}$$

$$b_1 c_1 = b_2 c_2 \tag{4b}$$

由此求得

$$A = \begin{bmatrix} \sigma & kw \\ -\frac{w}{k} & \sigma \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中参数 $k$ 与 $\lambda$ 和 $\alpha$ 有关。

Barnes提出 $b_2 = 0$ , 并选择参数 $k$ 使得 $kw$ 或 $-w/k$ 为2的负幂<sup>[5]</sup>, 造成次最优二阶LSS滤波器, 设计程序简单, 因此很有实用价值。

### 1.2 误差谱成形结构

图1为二阶误差反馈的二阶LSS数字滤波器, 其中 $A_1$ 和 $A_2$ 为反馈网络矩阵, 并设

$$A_1 = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{bmatrix}$$

考虑舍入运算在求和之后, 由图1得状态方程

$$x(n+1) = A x(n) + (A_1 - A)e(n) + A_2 e(n-1) + B u(n) \tag{6}$$

由式(6)求得状态变量的噪声冲激响应

$$h_e(n) = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ A_1 - A, & n = 1 \\ A^{n-1}(A_1 - A) + A^{n-2}A_2, & n \geq 2 \end{cases} \tag{7}$$

则系统的输出舍入噪声

$$y_e(n) = C[h_e(n) \otimes e(n)] \tag{8}$$

式中符号 $\otimes$ 表示卷积运算。

设舍入噪声 $e(n)$ 为平稳独立、零均值和等方差 $\sigma_e^2$ 的白噪声, 即

$$E[e(l)e^t(m)] = \sigma_e^2 \delta(l-m) \mathbf{I} \tag{9}$$

式中 $\mathbf{I}$ 为单位矩阵, 标号 $t$ 表示转置运算。

利用均值定义<sup>[1]</sup>, 则系统的输出噪声方差

$$\sigma_{y_e}^2(n) = E[y_e(n) \cdot y_e^t(n)] = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{M+1} \sum_{n=0}^M y_e(n) \cdot y_e^t(n) \right] \tag{10}$$

利用式(7)~(10), 求得系统的单位噪声增益

$$\mu = 2Re\{[1/(1-\lambda^2)]CRDR^tC^t\} + 2Re\{[1/(1-|\lambda|^2)]CRD(R^*)^tC^t\} \tag{11}$$

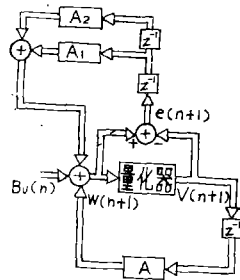


图1 含二阶误差反馈滤波器  
Fig.1 Filter with second-order error feedback

式中  $D = (A_1 - A)(A_1 - A)^t + A_2 A_2^t + A(A_1 - A)A_2^t + A_2(A_1 - A)^t A^t$ ,

$$R = \begin{bmatrix} 1/2 & -ik/2 \\ i/2k & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \text{Re}[\cdot] \text{ 为取实部}$$

观察式(11)可知, 若  $A_1 = A$  和  $A_2 = 0$ , 则  $\mu = 0$ 。这说明含最优 ESS 反馈结构的单精度字长实现是等效于原滤波器状态变量的双精度字长实现。换句话说, 最优 ESS 反馈 LSS 滤波器是等效于增加滤波器内部变量字长而保持系数字长不变。

### 1.3 等效噪声谱

因为图 1 中的  $v(n)$  和  $w(n)$  几乎没有差别, 若取量化器输出  $v(n)$  为状态变量, 则我们得到下面状态方程(当  $u(n) = 0$  时)

$$x(n+1) = A x(n) + A_1 e(n) + A_2 e(n-1) - e(n+1) \quad (12)$$

对式(3)和(12)作  $z$  变换, 由此求得系统的输出噪声谱

$$Y_e(Z) = C(ZI - A)^{-1}(A_2 Z^{-1} + A_1 - ZI)E(Z) \quad (13)$$

则等效噪声谱

$$E'(Z) = (I - A_1 Z^{-1} - A_2 Z^{-2})E(Z) \quad (14)$$

可知, 适当选择误差反馈系数矩阵  $A_1$  和  $A_2$ , 即调整式(14)的零点位置, 使更多的噪声能量移入滤波器的阻带, 从而降低通带内的输出噪声。等效噪声谱的零点越接近滤波器的极点, 输出噪声降低越多。

## 2 计算结果

### 2.1 窄带低通滤波器的一阶误差反馈例子

利用 Barnes 的八阶 Chebyshev 低通滤波器为例子<sup>[6]</sup>, 它由 4 个二阶节并联实现, 对每个二阶节的最优(OPT)和次最优(SUB)LSS 结构, 分别加入 8 种不同系数误差反馈, 用含 3 次插值无约束 DFP 法, 对式(11)求得单位噪声增益极小值见表 1。

表 1 不同 ESS 结构的 OPT 和 SUB 的单位噪声增益极小值\*

Tab.1 The minima of unit noise gain of OPT and SUB for different ESS structures

节	寻优变量 或 $A_1$	$\mu_{min}$								
		$A \pm I$	0	$a'_{11}$	$a'_{12}$	$a'_{21}$	$a'_{22}$	$a'_{11}$ 和 $a'_{22}$	$\sigma I$	I
1	OPT	0.6515	0.6425	0.3429	0.6393	0.6349	0.3282	0.0106	0.0106	0.0108
	SUB	0.6580	0.6485	0.3313	0.6395	0.6471	0.3279	0.0107	0.0106	0.0108
2	OPT	0.7484	0.7189	0.3639	0.7130	0.7158	0.3639	0.0089	0.0089	0.0094
	SUB	0.8820	0.8412	0.3183	0.8232	0.8546	0.5324	0.0095	0.0096	0.0103
3	OPT	0.9619	0.9029	0.4629	0.8930	0.9099	0.4449	0.0049	0.0049	0.0059
	SUB	1.061	0.9951	0.2949	0.9831	1.005	0.7850	0.0049	0.0049	0.0061
4	OPT	0.7489	0.7047	0.3457	0.7079	0.6930	0.3599	0.0009	0.0009	0.0015
	SUB	0.9170	0.8572	0.2225	0.8579	0.8519	0.6359	0.0010	0.0010	0.0020

\* 非寻优变量(如第 3 列的  $a'_{12}$ ,  $a'_{21}$  和  $a'_{22}$ )均为零

从表 1 可知：①第 1 列数值与 Barnes<sup>[5]</sup>的计算结果相符合。②单反馈系数  $a'_{12}$  和  $a'_{21}$  对降噪近乎无贡献，而  $a'_{11}$  或  $a'_{22}$  对降噪效果也不大。③第 7 列的对角型反馈系数  $a'_{11}$  和  $a'_{22}$  的降噪高达 17~29.3dB (降噪定义为  $10 \lg(\mu_0/\mu_{\min})$ )，其中  $\mu_0$  对应  $A_1=0$  的情况)。④第 7 至 9 列的数值相差很小，这说明对窄带低通滤波器，选用简单一阶反馈  $A_1=I$  对降噪是成功的，且次最优结构可替换最优结构。

### 2.2 误差反馈降噪性能的统计分析

将降噪比值  $10 \lg(\mu_0/\mu)$  的统计均值称为降噪性能，其中  $\mu_0$  和  $\mu$  分别对应  $A_1=A_2=0$  和加入 ESS 结构后系统的单位噪声增益。下面用统计方法计算次最优二阶 LSS 滤波器加入不相同的误差反馈后的降噪性能。

设二阶滤波器的极点为  $Z_{p1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$ ，其中取  $\rho = 0.90, 0.92, 0.94, 0.96, 0.98$  和  $0.99$  六个数值。取  $\theta = 1^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 35^\circ, \dots, 85^\circ$  十一个数值。再对二阶节的留数  $\alpha = \alpha_1 + j\alpha_2$ ，取  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别为

$$\alpha_1 = -0.1 + l[0.1 - (-0.1)]/N$$

$$\alpha_2 = -0.1 + m[0.1 - (-0.1)]/N \quad l, m = 1, 2, \dots, N$$

即  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  分别从 -0.1 到 0.1 内有  $N$  个等差值。这样，对每一确定极点，可造成  $N_s = N \times N$  个不同留数的二阶节。对这些二阶节用次最优 LSS 实现<sup>[5]</sup>，然后将表 2 中 ESS 结构分别加入上面二阶节，用式(11)和 DFP 优化方法计算新结构的降噪性能。图 2 给出采用 ESS0 和 ESS1 型的降噪性能。可知，一阶误差反馈单位系数型 ESS1 的降噪性能接近最优对角型 ESS0 的水平，后者降噪可达 10—30dB。它们适用于窄带低通滤波器，带宽愈窄降噪效果愈好。

表 2 简单一阶和二阶误差反馈 ESS 结构

Tab.2 First-order and second-order error feedback ESS structures

反馈矩阵	ESS0	ESS1	ESS2	ESS3	ESS4	ESS5	ESS6	ESS7	ESS8
$A_1$	$\begin{bmatrix} a'_{21} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}$	$I$	$\begin{bmatrix} 1 & k\omega \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & a'_{12} \\ a'_{21} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{bmatrix}$	$I$	$2I$	$\frac{1}{2}I$
$A_2$	0	0	0	0	0	-I	-I	-I	-I

为节省篇幅，这里没给出表 2 中其他 ESS 结构的降噪性能曲线，对它们只作定性说明：ESS1 型比 ESS2 型的降噪性能稍差，ESS2 型同样适用于窄带低通滤波器。最优反对角型 ESS3 的效果比 ESS4 型好，它们仅适用于宽带低通滤波器。二阶反馈的 ESS5 型比 ESS6 型任何时候都好，只当  $\theta = 60^\circ$  时两者的降噪性能接近。ESS8 型的效果近似 ESS6 型，ESS8 型在  $\theta = 75^\circ$  时有最好的降噪性能。最后，ESS7 型当  $\theta = 5-10^\circ$  时降噪性能最好，当  $\theta = 45-70^\circ$  时就比 ESS6 型的效果差。为减少计算工作量，一般不宜采用最优的对角型或反对角型。下面介绍一种选择误差反馈结构的方法，即等降噪性能曲线。

应当指出，我们计算了表 2 中各种 ESS 结构的降噪比值  $10 \lg(\mu_0/\mu)$  的方差，发现绝

大部份的方差值为 $10^{-2}$ — $10^{-4}$  量级。这表明对于窄带滤波，表 2 中各种 ESS 结构的降噪性能受滤波器的留数  $\alpha$  影响较小。换句话说，这些新结构的降噪性能对滤波器的零点不敏感。

### 2.3 等降噪性能曲线

设想在 Z 平面的第一象限内，用等降噪性能曲线划分为若干区域。对每一区域，存在一种降噪效果为最佳的误差反馈 ESS 结构。设滤波器极点  $Z_p = \sigma + j\omega$  的实和虚部的统计数目  $N_s = 30 \times 30$ ，用统计方法和含 3 次插值 DFP 无约束优化方法，可拟合得  $\omega$  为  $\sigma$  的三阶多项式的等降噪性能曲线。图 3 给出这些等降噪性能曲线。利用图 3，对给定的滤波器，可以方便地选择硬件结构简单且有最好降噪效果的误差反馈 ESS 结构。

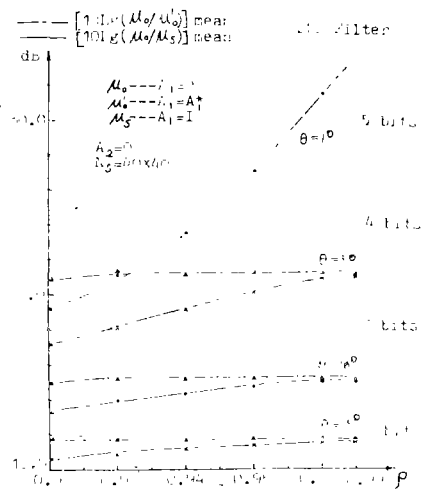
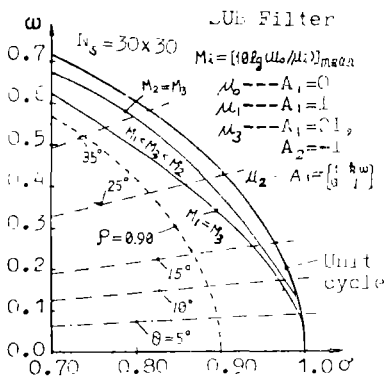
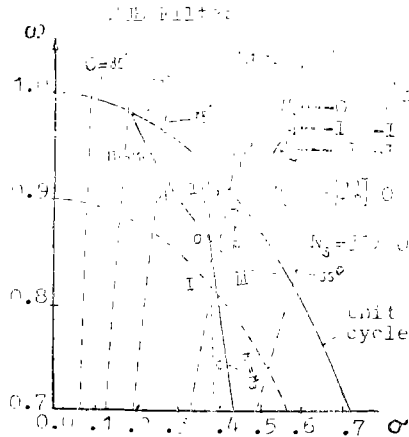


图 2 ESS0 和 ESS1 型的降噪性能  
Fig.2 Noise reduction performance for types ESS0 and ESS1



(a)



(b)

图 3 等降噪性能曲线，I (AOC):  $M_3 > \max(M_1, M_2)$ ，II (AOB):  $M_2 > \max(M_1, M_3)$ ，III (BOC):  $M_1 > \max(M_2, M_3)$

Fig.3 Curves having the same noise reduction performance

### 2.4 高阶窄带椭圆滤波器例子

设高阶递归型数字滤波器的传递函数

$$H(Z) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{Z - \lambda_i} + d \tag{15}$$

式中  $\lambda_i$  和  $\alpha_i$  均为复数， $d$  为实数。设  $N$  为偶数时，则椭圆滤波器的传递函数

$$H(Z) = \sum_{i=1}^{N/2} \left( \frac{\alpha_i}{Z - \lambda_i} + \frac{\alpha_i^*}{Z - \lambda_i^*} \right) + d \tag{16}$$

对上面  $N/2$  个二阶节，分别用次最优二阶 LSS 实现，并根据每个二阶节的极点，利

用图3选择相应的最佳ESS结构,分别加入上述的次最优LSS二阶节,从而降低高阶滤波器的输出噪声.用这种新结构来实现窄带低通、窄带带通和窄带带阻椭圆滤波器<sup>[6]</sup>,其设计数据、二阶节的单位噪声增益和降噪比值的计算结果见表3,其中只考虑极点幅角 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 的情况.我们还分别设计了多个不同通带(阻带)宽度的高阶椭圆滤波的例子.计算表明,带宽愈窄,新高阶结构的降噪效果愈好.

应当指出,由Z平面第一象限和第二象限的对称性知道,对二阶节极点的幅角在 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 时,只需将误差反馈系数矩阵 $A_i$ 的符号改变,用同样的分析方法,便可得出与本节相似的结果.

表3 窄带椭圆数字滤波器新结构的降噪比值

Tab.3 Noise reduction ratio of narrow-band elliptic digital filters with the new structures

设计要求 (频率已归一化)	极点 $\lambda = \sigma + j\omega$		留数 $a = a_1 + ja_2$		原二阶节 $\mu_{oi}$	ESS 结构 型号	新二阶节 $\mu_{fi}$	降噪 比值* (dB)
	$\sigma$	$\omega$	$a_1$	$a_2$				
低通 截止频率0.010 阻带始频0.011	0.9964	0.0639	-0.0006	-0.0016	0.6681	2	0.0014	28.0
	0.9918	0.0609	0.0074	0.0018	0.7345	2	0.0013	
	0.9815	0.0507	-0.0182	0.0144	1.0975	2	0.0016	
带通 通带0.15~0.16 过渡带宽0.002	0.9665	0.0222	0.0112	-0.0450	0.9471	2	0.0011	14.4
	0.5326	0.8432	0.0011	0.0029	0.7969	6	0.0080	
	0.5879	0.8057	0.0022	0.0020	0.8415	6	0.0306	
	0.5332	0.8342	-0.0113	-0.0043	0.8930	6	0.0207	
	0.5797	0.8030	0.0003	-0.0116	0.9326	6	0.0434	
带阻 阻带0.15~0.162 过渡带宽0.002	0.5416	0.8180	0.0243	-0.0081	1.1358	6	0.0467	12.6
	0.5620	0.8045	-0.0166	0.0189	1.1565	6	0.0594	
	0.5833	0.8078	-0.0016	0.0038	0.7910	6	0.0279	
	0.5258	0.8461	0.0043	-0.0000	0.7491	6	0.0073	
	0.5757	0.7938	-0.0198	-0.0098	0.8407	6	0.0507	
	0.5155	0.8331	-0.0010	-0.0232	0.7892	6	0.0354	
	0.5282	0.7853	-0.0338	-0.0545	0.9243	6	0.1052	

注:通带波纹 $R = 0.1\text{dB}$ ,阻带衰减 $A = 40.0\text{dB}$ ,\*比值 $10\lg(\Sigma\mu_{oi}/\Sigma\mu_{fi})$   
上述全部计算结果均由PDP-11/23机FORTRAN语言程序算得.

### 3 结 语

文中给出误差反馈次最优二阶LSS滤波器单位噪声增益的计算公式.用统计和最优化方法研究了多种ESS结构的降噪性能.给出选择最佳ESS结构的方法.新结构可降噪10—30dB.滤波器的极点愈接近单位圆,降噪效果愈好.降噪性能对滤波器的零点不敏

感。新结构不仅保持次最优二阶LSS实现的优点,而且降低了单位噪声增益,改善原结构的极限环特性。对每一相加节点,只增加顶多两个寄存器和一个2乘法器,以及最多4次加法运算,且不会带来附加舍入噪声,对滤波器运算速度影响不大。因此,从滤波器的性能(包括舍入噪声,溢出振荡和系数灵敏度等)和硬件复杂性两方面来考虑,新结构显出较大优点。

对并联实现高阶椭圆滤波器例子,新结构的输出舍入噪声比用次最优二阶LSS并联实现的原结构降低12—28dB。带宽愈窄,降噪效果愈好。

### 参 考 文 献

- [1] Hwang S Y, *IEEE Trans. ASSP*, ASSP-25(1977), 273
- [2] Munson D C et al., *IEEE Trans. CAS*, CAS-28(1981), 160
- [3] Barnes C W, *IEEE Trans. CAS*, CAS-26(1979), 154
- [4] Barnes C W, *IEEE Trans. CAS*, CAS-31(1984), 602
- [5] Barnes C W, *IEEE Trans. CAS*, CAS-31(1984), 841
- [6] Bomar B W, *IEEE Trans. CAS*, CAS-33(1986), 35
- [7] Higgins W E et al., *IEEE Trans. CAS*, CAS-31(1984), 429
- [8] Antoniou A, *Digital Filters: Analysis and Design*, McGraw-Hill, 1979

## Error Spectrum Shaping in Suboptimal Second--Order State-space Digital Filter

Zeng Xiaolin\*      Chen Junliang

### Abstract

A simple formula of unit noise gain is derived for suboptimal second-order state-space digital filter with error feedback. Noise reduction performances obtained by using statistics and optimization methods for nine ESS structures are shown and five curves on which two ESS structures have the same noise reduction performance are given. For narrow-band digital filtering, the new structure can reduce roundoff noise by 10-30 dB, and its noise reduction performance is insensitive to the location of zeros of the filter.

Examples of high order narrow-band lowpass, bandpass and bandstop elliptic filter demonstrate, that parallel realization of the new structures offers 12-28 dB reduction in noise gain comparing with the parallel realization of suboptimal second-order LSS filter, and that the narrower the bandwidth, the more the noise reduction.

**Keywords** digital filter, error spectrum shaping, unit noise gain

\*Department of Radio and Electronics