

· 研究简报 ·

双曲方程组在具特征斜率边界的区域内的边值问题

吴兹潜 禰启沃

(计算机科学系)

摘 要

考虑二阶第一类双曲型方程组(即不含重特征的完全双曲型方程组)在一个封闭区域内的边值问题,区域的边界除角点外处处具特征斜率.当方程组具某种形式的低阶项(包括不含低阶项的情况),问题解的存在性依赖于边值数据适合一个相容条件,而当低阶项具另一结构时,问题的古典解恒存在,具有某种意义的唯一性.

关键词 双曲方程组, 低阶项, 边值问题

文[1]引入“全特征行列式”新概念,将经典分类法推广到算子的整体分类法.本文提供一个材料,表明低阶项对方程组算子性质确实存在不可忽略的影响.

考虑二阶第一类双曲型方程组标准型^[1]

$$u_{xx} + 2b_1u_{xy} + 2v_{xy} + a_1u_x + a_2v_y = 0 \tag{1}$$

$$2b_3u_{xy} + 2b_1v_{xy} + v_{yy} + a_3u_x + a_4v_y = 0 \tag{2}$$

$$b_3 = ab \neq 0, \quad a = k/2 - b_1, \quad b = (2k)^{-1} - b_1, \quad 0 < k < 1, \quad b_1 \neq 0$$

在平面上以 $A(0, 0)$, $B(d, 0)$, $C(d/(1-k^2), kd/(1-k^2))$ 为顶点的三角形区域内满足边界条件

$$u|_{AC} = \alpha(x), \quad u|_{AB} = \beta(x), \quad u|_{BC} = \gamma(x) \tag{3}$$

$$(v_x + \frac{1}{2}a_2v)|_{AC} = \delta(x) \tag{4}$$

的边值问题,其中 B 点的横标 $d \neq 0$.上述三角形的三条边具有方程组(1), (2)的特征斜率.以 \bar{D} 表示闭三角形区域去掉顶点后的余域.

定理 1 若 $u, v \in C^2(\bar{D})$, 则 u, v 满足(1)、(2)与满足

$$\partial_x \Psi(u) = 0 \tag{5}$$

$$v(x, y) = \exp\left(\frac{-1}{2}a_2x\right) \left\{ v(0, 0) + v_y(0, 0)(b_1a_2 - a_4)^{-1} \times [\exp((b_1a_2 - a_4)y) - 1] \right. \\ \left. + \int_0^y \exp((b_1a_2 - a_4)y) \int_0^y \exp((a_4 - b_1a_2)y) \Phi(u) dy dy \right\}$$

本文1988年11月14日收到

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^y k^{-1} \exp((2k)^{-1} \alpha_2 y) \times \left(v_x + \frac{\alpha_2}{2} v \right) |_{x=y/k} dy + \int_{y/k}^x \exp\left(\frac{1}{2} \alpha_2 x\right) \\
 & \cdot \left[\int_{kx}^y \frac{-1}{2} (u_{xx} + 2b_1 u_{xy} + \alpha_1 u_x) dy + \left(v_x + \frac{1}{2} \alpha_2 v \right) |_{y=kx} \right] dx \quad (6)
 \end{aligned}$$

是等价的, 其中

$$\Psi(u) = (k + 1/k) u_{xy} + \Delta u + m u_x + n u_y + l \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 \Phi(u) = \exp\left(\frac{-1}{2} \alpha_2 x\right) & \left\{ b_1 \Psi(u) - \frac{1}{2} b_1 \alpha_2 u_x + \alpha_2 (b_3 - b_1^2) u_y \right. \\
 & + \left. \frac{1}{2} \alpha_2 (\alpha_3 - b_1 \alpha_1) u \right\} - \int_{y/k}^x \frac{\alpha_2}{4} \exp\left(\frac{\alpha_2}{2} x\right) [u_{xy} + 2b_1 u_{yy} \\
 & + (\alpha_1 + 2b_1 \alpha_4 - 2b_1^2 \alpha_2) u_y + (\alpha_4 - b_1 \alpha_2) u_x + \alpha_1 (\alpha_4 - b_1 \alpha_2) u] dx \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2}{2k} - \alpha_4 + b_1 \alpha_2 - \frac{d}{dy} \right) \left[\exp\left(\frac{\alpha_2}{2k} y\right) (u_x + 2b_1 u_y + \alpha_1 u) |_{x=y/k} \right] \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m & = (b_1 \alpha_1 + \alpha_4 / 2 - \alpha_3) b_1^{-1}, \quad n = (b_1 \alpha_4 + \alpha_1 / 2 - b_3 \alpha_2) b_1^{-1}, \\
 l & = (\alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3) (2b_1)^{-1} \quad (9)
 \end{aligned}$$

定理 2 假设方程组(1), (2)的系数 α_i 满足

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{kb+a/k}{kb-a/k} & \frac{2b_1+1/(2b_1)}{2ab} & \frac{1}{2ab} \\ 0 & (kb-a/k)^{-1} & -(2abb_1)^{-1} & b_1^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \quad \beta_2 = \pm \beta_1 \quad (10)$$

则由(9)中的 m, n, l 通过

$$M = -(m - kn)(k - 1/k)^{-2}, \quad N = -(m - n/k)(k - 1/k), \quad L = -l(k - 1/k)^{-2} \quad (11)$$

表示的常数 M, N, L 满足 $MN = L, M + N = 0$ 的充要条件是

$$\begin{cases} \beta_4 = -b\beta_1(b-a)^{-2} + \beta_3(2ab)^{-1}, & \text{当 } \beta_2 = \beta_1 \\ \beta_4 = -a\beta_1(b-a)^{-2} + \beta_3(2ab)^{-1}, & \text{当 } \beta_2 = -\beta_1 \end{cases} \quad (12)$$

定理 3 设 α_i 满足定理 2 的假设. 在 $C^2(\bar{D})$ 考虑方程组(1)、(2)满足边界条件(3)、(4)的解. 对任意 $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x) \in C^2$, 任意 $\delta(x) \in C_1$, 解恒存在的充要条件是(10)中的 β_i 不满足(12), 在此条件下 u 是唯一的, v 在相差函数

$$\exp\left(\frac{-1}{2} \alpha_2 x\right) \{c_1 + c_2 (b_1 \alpha_2 - \alpha_4)^{-1} [\exp((b_1 \alpha_2 - \alpha_4) y) - 1]\}, \quad \forall c_1, c_2 \quad (13)$$

的意义下唯一. 若(12)成立, 解存在的充要条件是函数

$$\begin{aligned}
 F(\xi) = \exp(N\xi) & \{ \beta''(\xi) - [\exp(N\xi) \alpha((1 - k^2)^{-1} \xi)]'' \\
 & - [\exp(N(d - \xi)) \gamma((1 - k^2)^{-1} (d - k^2 \xi))]'' \} \quad (14)
 \end{aligned}$$

满足相容条件

$$\exp(M\xi) F(\xi) = \exp(M(d - \xi)) F(d - \xi), \quad \forall \xi \in [0, d], \quad (15)$$

在此条件下, u, v 均不唯一.

证明 据定理 1，解 (u, v) 的存在唯一性取决于方程 (5) 在 $C^2(\bar{D})$ 满足 (3) 的解 u 的存在唯一性。作变换： $\xi = x - ky, \eta = x - y/k; u(\xi, \eta) = \exp(-N\xi - M\eta)\bar{u}(\xi, \eta)$ 。则 XY 平面上 $A(0, 0), B(d, 0), C(d(1 - k^2)^{-1}, kd(1 - k^2)^{-1})$ 分别变为 $\xi\eta$ 平面上 $A^*(0, 0), B^*(d, d), C^*(d, 0)$ 。用 \bar{D}^* 表示闭三角形 $A^*B^*C^*$ 除去顶点后的余域。利用定理 2，不难知道方程 (5) 化为

$$\partial_{\xi\eta}\bar{u} = \exp(N\xi + M\eta)f(\xi - \eta) \tag{16}$$

其中 f 是任意连续函数。边界条件 (3) 成为

$$\begin{aligned} \bar{u}|_{A^*C^*} &= \exp(N\xi)\alpha((1 - k^2)^{-1}\xi) = \tilde{\alpha}(\xi), \bar{u}|_{A^*B^*} = \exp((M + N)\xi)\beta(\xi) = \tilde{\beta}(\xi), \\ \bar{u}|_{C^*B^*} &= \exp(Nd + M\eta)\gamma((1 - k^2)^{-1}(d - k^2\eta)) = \tilde{\gamma}(\eta) \end{aligned} \tag{17}$$

若方程 (16) 在 $C^2(\bar{D}^*)$ 有满足 (17) 的解 \bar{u} ，则 \bar{u} 可表为

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \tilde{\alpha}(\xi) + \tilde{\gamma}(\eta) - \tilde{\gamma}(0) + \iint_{d^0}^{\xi\eta} \exp(Nx + My)f(x - y) dy dx \tag{18}$$

其中特定的连续函数 f 满足积分方程

$$\tilde{\beta}(\xi) = \tilde{\alpha}(\xi) + \tilde{\gamma}(\xi) - \tilde{\gamma}(0) + \int_d^\xi \int_0^\xi \exp(Nx + My)f(x - y) dy dx \tag{19}$$

反之，若有连续函数 f 满足积分方程 (19)，则由 (18) 表示的函数 $\bar{u}(\xi, \eta)$ 属于 $C^2(\bar{D}^*)$ 且满足方程 (16) 与边界条件 (17)，故方程 (16) 在 $C^2(\bar{D}^*)$ 满足 (17) 的解的存在唯一性，取决于积分方程 (19) 的连续解的存在唯一性。

对 (19) 作积分变数替换 $y = x - t$ 后，对 ξ 求导，化简；再对 ξ 求导，得函数方程

$$\exp((N - M)\xi)f(\xi) + \exp(dN)f(d - \xi) = F(\xi), 0 < \xi < d \tag{20}$$

其中， $F(\xi) = \exp(-M\xi)\{ (M + N)[\tilde{\alpha}'(\xi) - \tilde{\beta}'(\xi) + \tilde{\gamma}'(\xi)]$

$$- \tilde{\alpha}''(\xi) + \tilde{\beta}''(\xi) - \tilde{\gamma}''(\xi) \} \tag{21}$$

易知 (20) 的连续解满足 (19)，从而积分方程 (19) 与函数方程 (20) 在连续解的存在唯一性上等价。

若 (12) 不成立，由定理 2， $M + N \neq 0$ ，函数方程 (20) 有唯一的连续解

$$f(\xi) = [\exp((M - N)\xi)F(\xi) - \exp(Md)F(d - \xi)][1 - \exp((M + N)d)]^{-1} \tag{22}$$

此时边值问题 (1), (2), (3), (4) 在 $C^2(\bar{D})$ 的解 (u, v) 存在， u 是唯一的， v 在相差函数 (13) 的意义下唯一。

若 (12) 成立，由定理 2， $M + N = 0$ ，由 (21) 表示的函数 $F(\xi)$ 变成 (14) 的形式，函数方程 (20) 成为

$$\exp(-M\xi)f(\xi) + \exp(M(\xi - d))f(d - \xi) = \exp(M\xi)F(\xi) \tag{23}$$

(23) 有解的充要条件是 (15)，在此条件下全体连续解是

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \exp(2M\xi)F(\xi) + \exp(M\xi)Q(\xi)$$

其中, $Q(\xi)$ 是适合 $Q(\xi) + Q(d - \xi) = 0, \forall \xi \in [0, d]$ 的任意连续函数。故当相容条件 (15) 不满足时, 边值问题 (1), (2), (3), (4) 在 $C^2(\bar{D})$ 无解, 当 (15) 满足时, 边值问题在 $C^2(\bar{D})$ 的解 (u, v) 存在, 但 u, v 都不唯一。证毕。

当 β_i 均取零时, 方程组无低阶项, (12) 成立, 边值问题 (1)(2)(3)(4) 在 $C^2(\bar{D})$ 的唯一可解性不成立。

参 考 文 献

- [1] 吴兹潜等, 中山大学学报论丛(自然科学), 7(1988), 1, 1~9
 [2] 华罗庚等, 二阶两变数两未知函数的常系数线性偏微分方程组, 科学出版社, 1979

A Boundary Value Problem on a Bounded Region for the Hyperbolic System of PDEs

Wu Ziqian* Xuan Qiwo

Abstract

We offer an interesting example which shows the influence of lower order terms on the property of operator. This example is about a boundary value problem for the hyperbolic system of PDEs of the first type on a bounded region in which the boundary has characteristic slope except at the angular points. Following the changes in lower order terms, the unique solvability of the boundary value problem has also changed.

Keywords lower order term, boundary value problem, hyperbolic system of PDEs

*Department of Computer Science