

几何非线性弹性动力学中广义 Hamilton型拟变分原理*

罗 恩

(应用力学与工程系)

摘 要

提出了新的各种广义Hamilton型拟变分原理,这些变分原理能反映几何非线性弹性动力学初值-边值问题的全部特征。

关键词 拟变分原理 几何非线性弹性动力学 初值-边值问题

在弹性动力学中,人们熟知的Hamilton变分原理,所考虑的是时间上的端值问题,不能表征弹性动力学的初值-边值问题。自1964年,Gurtin利用卷积理论,提出了能反映线弹性动力学初值-边值问题全部特征的变分原理—Gurtin型变分原理^[1]以来,不少学者都一直在寻找一种既简单而又能反映几何非线性弹性动力学初值-边值问题全部特征的变分原理^[2-4]。

本文提出了一类新的广义Hamilton型拟变分原理,它能反映几何非线性弹性动力学初值-边值问题全部特征。由于它不是以某一泛函的驻值形式出现,而是以变分式表示,故称为拟变分原理。作者根据类似于文[2]的思想,系统地建立了五类变量、四类变量、三类变量、二类变量及一类变量的广义Hamilton型拟变分原理。下面只给出四种广义Hamilton型拟变分原理。

模型均映射在Lagrange构型上。为简单起见,下面的论述采用笛卡尔张量记号,且在空间直角坐标系中进行。

1 几何非线性弹性动力学的基本方程及条件

$$\text{速度位移关系 } v_i = \frac{Du_i}{Dt} = \dot{u}_i \quad (1)$$

$$\text{动量速度关系 } p_i = \rho_0 v_i \quad (2)$$

$$\text{运动方程 } [(\delta_{ij} + u_{i,j})\sigma_{j,k}]_{,k} + F_i = \dot{p}_i \quad (3a)$$

或

$$[(\delta_{ij} + u_{i,j})\sigma_{j,k}]_{,k} + F_i = \rho_0 \dot{u}_i \quad (3b)$$

本文1989年3月3日收到

• 国家自然科学基金资助项目

$$\text{应变位移关系 } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \quad (4)$$

$$\text{应力应变关系 } \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (5a)$$

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (5b)$$

$$\text{力的边界条件 } (\delta_{ij} + u_{i,j})\sigma_{jk}n_k = \bar{T}_i \text{ 在 } s_T \text{ 上} \quad (6)$$

$$\text{位移边界条件 } u_i = \bar{u}_i \text{ 在 } s_u \text{ 上} \quad (7)$$

$$\text{初始条件 } u_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \quad (8a)$$

$$p_i(\mathbf{x}, 0) = \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \quad (8b)$$

式中, p_i 为动量向量的分量, v_i 为速度向量的分量, u_i 为位移向量的分量, ε_{ij} 为 Green 应变张量的分量, σ_{ij} 为 Kirchhoff 应力张量的分量, ρ_0 为质量密度, E_{ijkl} 和 C_{ijkl} 分别为弹性刚度和弹性柔度系数, \bar{T}_i 为在边界面 s_T 上给定的面力分量, \bar{u}_i 为在边界面 s_u 上给定的位移分量, $\bar{u}_{0i}(\mathbf{x})$ 和 $\bar{p}_{0i}(\mathbf{x})$ 分别为 $t=0$ 时已知初始位移和动量值, δ_{ij} 为 Kroneker delta, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

2 各种广义 Hamilton 型拟变分原理

2.1 五类变量广义拟变分原理

定理 1 当且仅当 $p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 是混合问题(1), (2), (3a), (4), (5a), (6), (7), (8a, b) 的解, 必定满足下列变分式

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Pi}_5(p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho_0 v_i v_i + p_i (\dot{u}_i - v_i) \right] d\Omega dt \right. \\ & \left. - \int_0^t \Pi_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) dt \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \left[-p_i(\mathbf{x}, t) \delta u_i(\mathbf{x}, t) + \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right] \right. \\ & \left. + \left[u_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta p_i(\mathbf{x}, 0) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{势能形式}) \end{aligned} \quad (9)$$

或

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Gamma}_5(p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \left[-\frac{1}{2\rho_0} p_i p_i - \frac{1}{2\rho_0} (\rho_0 v_i - p_i)^2 + \dot{p}_i u_i \right] d\Omega dt \right. \\ & \left. - \int_0^t \Gamma_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) dt \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \left[-u_i(\mathbf{x}, t) \delta \dot{p}_i(\mathbf{x}, t) + \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \delta p_i(\mathbf{x}, 0) \right] \right. \\ & \left. + \left[\dot{p}_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{余能形式}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \Pi_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij} \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i}u_{k,j}) \right] \right. \\ & \left. - F_i u_i \right\} d\Omega - \int_{s_T} \bar{T}_i u_i dS - \int_{s_u} (u_i - \bar{u}_i) (\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k dS \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,i} \sigma_{ii} - \frac{1}{2} C_{ijmn} (\sigma_{ij} - E_{ijkl} \varepsilon_{kl}) (\sigma_{mn} \right. \\ & - E_{mnpq} \varepsilon_{pq}) + \left. \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} \right]_{,k} u_i + F_i u_i \right\} d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i (\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k dS \\ & - \int_{S_T} \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k - \bar{T}_i \right] u_i dS \end{aligned} \quad (12)$$

证明 所有各类变量都独立参与变分，于是有

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Pi}_5(p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \int_0^t \left\{ \int_{\Omega} (\dot{u}_i - v_i) \delta p_i - (p_i - \rho_0 v_i) \delta v_i + \left(\left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} \right]_{,k} \right. \right. \\ & + F_i - \dot{p}_i) \delta u_i + (\tau_{ij} - E_{ijkl} \varepsilon_{kl}) \delta \varepsilon_{ij} + \left. \left[\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \right] \delta \sigma_{ij} \right. \\ & - \left. \int_{S_T} \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k - \bar{T}_i \right] \delta u_i dS + \int_{S_u} (u_i - \bar{u}) \delta \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k \right] dS \right\} dt \\ & - \int_{\Omega} \left[p_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta u_i(\mathbf{x}, 0) d\Omega + \int_{\Omega} \left[u_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta p_i(\mathbf{x}, 0) d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

充分性 若 $p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 是混合问题 (1) — (8a, b) 的解，则 (13) 式就变成

$$\delta \hat{\Pi}_5 = 0$$

即 (9) 式成立。

必要性 若 (9) 式成立，即 $\delta \hat{\Pi}_5 = 0$ ，注意到 (13) 式，由于 $\delta p_i, \delta v_i, \delta u_i, \delta \varepsilon_{ij}, \delta \sigma_{ij}, \delta u_i$ (在 S_T 上), δT_i (在 S_u 上), $\delta u_i(\mathbf{x}, 0), \delta p_i(\mathbf{x}, 0)$ 的任意性，因而可导出 (1) — (8a, b) 式，即 $p_i, v_i, u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 是混合问题 (1) — (8a, b) 的解。

2.2 三类变量广义拟变分原理

定理 2 当且仅当 $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ 是混合问题 (3b), (4), (5a), (6), (7), (8a, b) 的解，必定满足下列变分式

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Pi}_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega dt - \int_0^t \Pi_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) dt \right\} \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \left[-\rho_0 \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \delta u_i(\mathbf{x}, t) + \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right] \right. \\ & \left. + \left[u_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{势能形式}) \end{aligned} \quad (14)$$

或

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Gamma}_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) = & \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho_0 u_i u_i \right) d\Omega dt - \int_0^t \Gamma_3(u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}) dt \right\} \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \left[-u_i(\mathbf{x}, t) \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) + \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left[\rho_0 \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \} d\Omega = 0 \quad (\text{余能形式}) \quad (15)$$

2.3 二类变量广义拟变分原理

定理3 当且仅当 u_i, σ_{ij} 是混合问题(3b), (6), (7), (8a,b)及下式

$$C_{ij;l;\sigma_{il}} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} + u_{k,j}) \quad (16)$$

的解, 必定满足下列变分式

$$\delta \hat{\Pi}_2(u_i, \sigma_{ij}) = \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i d\Omega dt - \int_0^t \Pi_2(u_i, \sigma_{ij}) dt \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \left[-\rho_0 \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \delta u_i(\mathbf{x}, t) + \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right] + \left[u_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{势能形式}) \quad (17)$$

或

$$\delta \hat{\Gamma}_2(u_i, \sigma_{ij}) = \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i + \rho_0 \bar{u}_i u_i \right) d\Omega dt - \int_0^t \Gamma_2(u_i, \sigma_{ij}) dt \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \left[-u_i(\mathbf{x}, t) \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) + \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \rho_0 \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \right] + \left[\rho_0 \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \right] \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right\} d\Omega = 0 \quad (\text{余能形式}) \quad (18)$$

式中,

$$\Pi_2(u_i, \sigma_{ij}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) - \frac{1}{2} C_{ij;l;\sigma_{il}} - F_i u_i \right] d\Omega - \int_{S_T} \bar{T}_i u_i dS - \int_{S_u} (u_i - \bar{u}_i) (\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k dS \quad (19)$$

$$\Gamma_2(u_i, \sigma_{ij}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} C_{ij;l;\sigma_{il}} \sigma_{il} + \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \sigma_{ij} + \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} \right]_{,k} u_i + F_i u_i \right\} d\Omega - \int_{S_u} \bar{u}_i (\delta_{ij} + u_{i,j}) \sigma_{jk} n_k dS - \int_{S_T} \left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \dot{\sigma}_{jk} n_k - \bar{T}_i \right] u_i dS \quad (20)$$

2.4 一类变量广义拟变分原理

定理4 当且仅当 u_i 是混合问题(6), (7), (8a,b)及下式

$$\left[(\delta_{ij} + u_{i,j}) \frac{1}{2} E_{ikmn} (u_{m,n} + u_{n,m} + u_{l,m} u_{l,n}) \right]_{,k} + F_i = \rho_0 \dot{u}_i \quad (21)$$

的解, 必定满足下列变分式

$$\delta \hat{\Pi}_1(u_i) = \delta \left\{ \int_0^t \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho_0 \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{1}{8} E_{ij;l} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) (u_{k,l} + u_{l,k} + u_{n,i} u_{n,l}) + F_i u_i \right] d\Omega dt \right\} + \int_{\Omega} \left\{ \left[-\rho_0 \dot{u}_i(\mathbf{x}, t) \delta u_i(\mathbf{x}, t) + \bar{p}_{0i}(\mathbf{x}) \delta u_i(\mathbf{x}, 0) \right] \right\}$$

$$+ \left[u_i(\mathbf{x}, 0) - \bar{u}_{0i}(\mathbf{x}) \right]_{0_0} \delta \dot{u}_i(\mathbf{x}, 0) \} d\Omega = 0 \quad (22)$$

此外, 对于非保守系统非线性弹性动力学问题, 作者已建立了相应的广义Hamilton型拟变分原理, 有关内容将另文论述。

参 考 文 献

- [1] Gurtin M E, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 16 (1964), 34~50
 [2] 罗恩, 中国科学, A辑, 1987, 9, 936
 [3] Hlaváček I, *Aplikace Matematiky*, 12 (1967), 107~118
 [4] Oden J T et al. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1976)
 [5] 胡海昌, 弹性力学的变分原理及其应用, 科学出版社, 1981

Generalized Hamilton-type Quasi-Variational Principles in Geometrically Nonlinear Elastodynamics

Luo En*

Abstract

New generalized Hamilton-type quasi-variational principles in geometrically nonlinear elastodynamics are presented. These principles can fully characterize the initial-boundary value problems of geometrically nonlinear elastodynamics.

Keywords quasi-variational principle, geometrically nonlinear elastodynamics, initial-boundary value problem

* Department of Applied Mechanics and Engineering