第28卷 第2期 1989年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.28 №.2 1989

极值点的局部判别定理

张 能 明
(数 学 系)

摘 要

利用区域边界曲线的曲率性质，研究所有象在该区域的解析函数组成的集合之极值点，给出函数成为极值点的充分条件，并求得两类特殊的解析函数族之极值点，推广了前人的有关结论.

关键词 解析函数族，极值点，区域的可微边界曲线，曲率

1 引言与记号

以$\mathscr{A}$记$U=\{z||z|<1\}$上的全体解析函数在内闭一致收敛拓扑下组成的空间。$\mathbf{B}_0=\{\omega|\omega\in\mathscr{A},\ \omega(0)=0,\ |\omega(z)|<1\}$。设$f$，$F\in\mathscr{A}$，如果存在$\omega\in\mathbf{B}_0$，使$f=F\circ\omega$，则称$f$从属于$F$。以$S(F)$记全体从属于$F$的解析函数组成的集合。若$D=F(U)$，$a=F(0)$，则$S(F)$也记为$S_a(D)$。

对于$\mathscr{A}$的子集$\mathscr{F}$，以$co\mathscr{F}$，$\overline{co}\mathscr{F}$，$E\mathscr{F}$分别记$\mathscr{F}$的凸包，闭凸包与极值点。文[1]证明：当D为有界凸区域，边界为一条二阶连续可微曲线$\gamma(t)$，且$\gamma(t)$的相对曲率恒正时

$$ES_a(D)=\{f|f\in S_a(D),\quad \int_0^{2\pi}\log\lambda_\gamma(\theta)\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

$$=\{f|f=F\circ\omega,\ \omega\in\mathscr{B},\ \int_0^{2\pi}\log(1-|\omega(e^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

其中F为任一U到D的解析同胚，$F(0)=a$。$\lambda_r(\theta)$表示$f(e^{i\theta})$到γ的距离。即若令$\mathrm{d}_r(z)$表示z到曲线γ的距离，则$\lambda_r(\theta)=\mathrm{d}_r(f(e^{i\theta}))$。

当F为单叶函数时，$F\in H^p$[2]。由从属不等式[3]知$S(F)\subset H^p$ $(p<\frac{1}{2})$。此时$f(e^{i\theta})$，$\lambda_r(\theta)$几乎处处有定义。

本文将上面结论推广到一般的区域上，利用边界上的一条分断连续可微曲线，给出函数在$ES_a(D)$中的一个判定。并作为应用，求出了两类解析函数族的极值点。

定理1 设D为平面区域，$a\in D$。$\gamma(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$为$\partial D\cap\partial\overline{co}D$上的二阶连续可微曲线。$K(t)$为$\gamma(t)$的相对曲率。设$K(t)$恒正且在终端满足渐近条件：存在$\beta\geqslant 0$，$\omega\,\overline{\epsilon}\,\overline{D}$，使对$i=0$，1，有

本文1987年11月12日收到

$$\lim_{t\to i} K(t)\cdot\frac{(|\gamma(t)-\omega|^{\beta})}{(|\gamma(t)-B_i|^{\beta A_i})}>0$$

（其中：当 $\gamma(i)$ 有限时，$B_i=\gamma(i)$，$A_i=1$。而当 $\gamma(i)$ 无限时，$B_i=0$，$A_i=0$）。

若 $f\epsilon S_a(D)$，则 f 成为 $S_a(D)$ 的极值点的一个充分条件是

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}\mathrm{d}\theta=-\infty$$

定理2　设 F 为 $\bar{U}$ 到 D 的解析同胚，$F(0)=a$。$\gamma(t)(0\leqslant t\leqslant 1)$ 为 $\partial D\cap\partial\,\mathrm{co}D$ 上的一条连续曲线，$f\epsilon S_a(D)$。如果 f 满足

$$\int_0^{2\pi}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}\mathrm{d}\theta=-\infty$$

则存在 $\mathbf{B}_0$ 中的函数 ω，$\omega\epsilon E\mathbf{B}_0$，且 f 可表为 $f=F(\omega(z))$。

定理3　设 $F(z)=\left(\frac{1+az}{1-z}\right)^{\alpha}$ 或 $F=\log\frac{1+az}{1-z}$（$|a|=1$，$a\neq-1$，$0<\alpha<1$），

$$ES(F)=\{f\,|\,f\epsilon S(F)\text{ 且 } f(e^{i\theta})\epsilon\partial F(U)\ a.\ e.\}$$

定理4　设 $F(z)=\left(\frac{1+az}{1+bz}\right)^{\alpha}$ 或 $F(z)=\log\frac{1+az}{1+bz}$（$a\neq b$，$|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，$|ab|<1$），则取定解析分枝后，$F\epsilon\mathscr{A}$，且

$$ES(F)=\{f\,|\,f\epsilon S(F),\ \int_0^{2\pi}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

其中 γ 为 $F(U)$ 的边界曲线：$\gamma(t)=\left(\frac{1+ae^{2\pi ti}}{1+be^{2\pi ti}}\right)^{\alpha}$ 或 $\gamma(t)=\log\frac{1+ae^{2\pi ti}}{1+be^{2\pi ti}}$　$(0\leqslant t\leqslant 1)$

注1　定理1中的条件：$\gamma(t)$ 为二阶连续可微，可以改为分断二阶连续可微，而在临界点满足相应的渐近条件。

注2　渐近条件等价于：当 $\gamma(i)$ 有限时

$$\lim_{t\to i}\frac{K(t)}{|\gamma(t)-\gamma(i)|^{\beta}}>0$$

而当 $\gamma(i)$ 无限时

$$\lim_{t\to i}K(t)|\gamma(t)|^{\beta}>0\qquad(i=0,\ 1)$$

注3　当 D 为凸区域，γ 为其边界，$\gamma(0)=\gamma(1)$。γ 及其相对曲率满足定理1的条件，结合〔4〕不难看出

$$ES_a(\mathrm{D})=\{f\,|\,f=F(\omega),\ \omega\epsilon\mathbf{B}_0\text{ 且 }\int_0^{2\pi}\log(1-|\omega(e^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

$$=\{f\,|\,f\epsilon S_a(D),\ \int_0^{2\pi}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

$$=\{f\,|\,f\epsilon S_a(D),\ \int_0^{2\pi}\log\lambda_r(\theta)\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

注4　定理4中的 $ES(F)$ 有表达式

$$ES(F)=\{f\,|\,f=F\circ\omega,\ \omega\in\mathbf{B}_0,\ \int_0^{2\pi}\log(1-|\omega(e^{i\theta})|)\mathrm{d}\theta=-\infty\}$$

2 主要引理与定理的证明

以下引理是文章证明的关键，引理证明从略。

引理 1 设 D 是一个区域，$\omega\in\overline{D}$，$\gamma(t)(0\leqslant t\leqslant1)$为$\partial D\cap\partial\mathrm{co}D$ 上的二阶连续可微曲线。又存在β，使 $\gamma(t)$的相对曲率满足定理 1 中的渐近条件。

对正数M，α，定义D的子域：

$$D_M(\alpha)=\{z\,|\,z\in D,\ \log\frac{d_r(z)}{1+d_r(z)}\leqslant(-M\,|z-\omega|^{2\alpha}\Big/\prod_{i=0}^{1}|z-B_i|^{\alpha A_i})$$

则对固定的α，当M充分大时，存在正数N，使得对任意$\zeta\in\overline{D}_M(\alpha)$及复数$\sigma$，若$\zeta\pm\sigma\in\overline{D}$，则必有

$$|\sigma|\leqslant N(|\zeta-\omega|^{\beta/2}\Big/\prod_{i=0}^{1}|\zeta-B_i|^{\beta A_i/4})\cdot d_r^{1/2}(\zeta)$$

引理 2 设$F(z)=\log\dfrac{1+az}{1-z}$ $(|a|<1)$, $D=F(U)$, $D_1=\Big\{z\,|\,z\in D$, 且 $d_r(z)\leqslant$

$\min\left(\dfrac{\log^2 2}{c|e^z|+4\log 2},\ \varepsilon\right)\Big\}$ 对任何$\zeta\in\overline{D}_1$，$\sigma\in C$，如果$\zeta\pm\sigma\in\overline{D}$，则必有

$$|\sigma|\leqslant2\sqrt{c}\,|e^{1/2\zeta}|\cdot d_r^{1/2}(\zeta)$$

其中

$c=\dfrac{4\pi(1+|a|)^2}{(1-|a|)^3}$，$\gamma$为$D$的边界曲线，若记

$$H=\left\{(\gamma(t_1),\gamma(t_2))\,\Big|\,|\arg(\gamma'(t_1))-\arg(\gamma'(t_2))|\geqslant\frac{\pi}{2}\right\}$$

则 $\varepsilon=\min\limits_{(x,y)\in H}\{x\text{到}y\text{的距离}\}$

定理 1 的证明 不妨设$\omega=0\in\overline{D}$，令 $0<\alpha<\dfrac{1}{4}$。定义$D_M(\alpha)$如引理 1，M 为使引理 1 成立的充分大的数。由于 $f\in S_a(D)$为 $S_a(\mathrm{co}D)$的极值点蕴含 f 为 $S_a(D)$ 的极值点，因此不妨设D为一凸区域，此时$S_a(D)$为凸集。

现设 f 为满足定理条件的一函数，如果它不是极值点，则存在$g\in\mathscr{A}$，使$f\pm g\in S_a(D)$。由于 f、$f\pm g\in S_a(D)\subset H^p$，$g=\dfrac{1}{2}[(f+g)-(f-g)]\in H^p$ $\left(p<\dfrac{1}{2}\right)$。所以 $f(e^{i\theta}),g(e^{i\theta})$ 几乎处处存在且对 $[0,\ 2\pi]$ 上任一可测集 E，$\int_E\log|f(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta>-\infty$[5]。

记 $E_M(f,\ \alpha)=\{\theta\,|\,\theta\in[0,\ 2\pi]$，$f(e^{i\theta})$、$g(e^{i\theta})$ 存在且 $f(e^{i\theta})\in\overline{D}_M(\alpha)\}$，则当 $\theta\in E_M(f,\ \alpha)$时

$$f(e^{i\theta})\pm g(e^{i\theta})\in D,\quad f(e^{i\theta})\in\overline{D}_M(\alpha)$$

从而由引理 1 得

$$|g(e^{i\theta})|\leqslant[N\cdot|f(e^{i\theta})|^{\beta/2}\Big/\prod_{i=0}^{1}|f(e^{i\theta})-B_i|^{\beta A_i/4}]\cdot\lambda_r^{1/2}(\theta$$

注意到当 $\theta\in E_M(f,\ \alpha)$ 时

$$\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}>-M\,|f(e^{i\theta})|^{2\alpha}\Big/\prod_{i=0}^{1}|f(e^{i\theta})-B_i|^{\alpha A_i}$$

考虑到上式右边函数是某一 H^1 函数的边值函数，而由条件 $\int_0^{2\pi}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}\,d\theta=-\infty$，即可推得

$$\int_{E_M(f,\alpha)}\log\frac{\lambda_r(\theta)}{1+\lambda_r(\theta)}d\theta=-\infty$$

而因为 $f(z)$，$f(z)-B_i\in H^p$ $\left(p<\frac{1}{2}\right)$. 且当 M 充分大时 $\lambda_r(\theta)<1$，由上不难看出

$$\int_{E_M(f,\ \alpha)}\log|g(e^{i\theta})|\,d\theta=-\infty$$

对于可测集 $E_M(f,\ \alpha)$ 及 H^p 中的函数，这是不可能的，由此证明了 f 必是 $S_a(D)$ 的极值点。

定理3可用与文〔1〕、〔6〕完全一样的方式而证得．定理 4 除 $|b|=1$ 的情况外，完全满足定理 1 的各个条件，因而可直接从注 3 得到．当 $|b|=1$ 时，不妨设 $b=-1$，然后按照定理 1 的证明方法，结合引理 2 也可给出相应的证明。

定理 2 的证明　令 F_1 为 U 到 $\mathrm{co}D$ 的解析同胚 $F_1(0)=a$，则 F_1 是单叶凸函数。以 $\lambda_1(\theta)$ 记 $f(e^{i\theta})$ 到 $\partial\mathrm{co}D$ 的距离，由于 $\gamma\subset\partial\mathrm{co}D$，所以 $\lambda_1(\theta)\leqslant\lambda_\gamma(\theta)$。

设 $f=F_1(\phi)=F(\omega)$，$F_1(\omega_1)=F$. 则由 Schwartz 引理知

$$\phi=\omega_1\circ\omega,\quad |\phi(z)|\leqslant|\omega(z)|$$

如果 f 满足定理 2 的条件，即刻推出

$$\int_0^{2\pi}\frac{\lambda_1(\theta)}{1+\lambda_1(\theta)}d\theta=-\infty$$

于是由文〔4〕我们知道

$$\int_0^{2\pi}\log(1-|\phi(e^{i\theta})|)d\theta=-\infty$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\log(1-|\omega(e^{i\theta})|)d\theta\leqslant\int_0^{2\pi}\log(1-|\phi(e^{i\theta})|d\theta=-\infty,$$

ω 是 $\mathbf{B}_0$ 的极值点。

参 考 文 献

〔1〕Y Abu-Muhanna et al., *Math. Zeit.*, 176(1981), 511—519

〔2〕A Baernstein, *Acta. Math.*, 133(1974), 139—169

〔3〕Littewood J E, *Lectures on the Theorem of Functions*, Oxford Univesity press, Oxford, 1944

〔4〕Y Abu-Muhanna, *Proc. Am. Math. Soc.*, 87(1983), 439—433

〔5〕Garnett J B, *Bounded analytic function*, Academic press, London, 1981

〔6〕Milcetich J G, *Proc. Am. Math. Soc.*, 45(1974), 223—228

Local Discriminate Theorem for Extreme Points of Families of Analytic Functions

*Chang Nengming**

Abstract

Using the Local property of boundary curve of a domain, we present several theorems concerning the sufficient condition of extreme points of families of functions which map the unit disk to the domain. In particular, we solve the extreme points of families of analytic functions subordinating to functions which belong to two families of analytic functions.

Keywords families of analytic functions, extreme points, differentiable boundary curve, curvature

* Department of Mathematics

·简讯·

《偏微分方程及其数值解》专辑出版

即将出版的《中山大学学报》自然科学论丛(13)是一本关于偏微分方程理论和数值方法的论文集，主要反映吴兹潜教授等人近期的研究成果，包括偏微分方程组的分类，复合一混合型、双曲型、椭圆型方程组和特征型恒零的方程组的边值问题，拟线性双曲方程组的柯西问题，函数方程和流体力学的数值方法以及关于函数方程的一个综述。其中关于分类的结果在今年广东省偏微分方程学术会议上引起了与会者的浓厚兴趣。近年来，中山大学学报(自然科学版)上有关函数方程的论文有三篇被摘录在权威的《Methematical Review》上，这本《偏微分方程及其数值解》专辑对有关的科研人员将是很有帮助的。

(刘运康)