中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第4期 1990年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.29 No.4 1990

·研究简报·

2-可扩平面图

娄定俊
（计算机科学系）

摘 要

证明了所有具有偶顶点数的5—连通平面图是2-可扩的，并给出了非2-可扩的4-连通平面图。

关键词 完美对集，n-可扩图，圈边连通度

本文所讨论的图均为有限、无向、连通和简单的。

Plummer[1]引入了n-可扩图的定义。设ν和n是正整数，满足$n\leqslant(\nu-2)/2$。图G具有ν个顶点并有完美对集。那么，G称为n-可扩的，就是说：对于G中任意一个具有n条边的对集M，M包含在G的一个完美对集中。

Plummer在〔2〕中证明了任一平面图都不是3-可扩的。Holton，娄定俊[3]和Plummer[4]证明，当圈边连通度充分大时，正则平面图是2-可扩的.本文进一步扩展上述结果，证明所有具有偶顶点数的5-连通平面图是2-可扩的。同时，给出非2-可扩4-连通平面图的例子。

所有未在本文中定义的术语和符号引自〔5〕。

引理1 如果平面图G的围长为g，那么

$$\varepsilon\leqslant\frac{g}{g-2}(\nu-2) \qquad (1)$$

证明参见〔5〕中习题9.3.1。

推论1 如果G是偶图又是平面图，那么

$$\varepsilon\leqslant2(\nu-2) \qquad (2)$$

证明 由于G是偶图，$g(G)\geqslant4$。由引理1的式(1)可得(2)。

定理1 每个顶点数为偶数的5-连通平面图G是2-可扩的。

证明 假设G不是2-可扩的。G中有两条独立边$e_i=u_iv_i$ $(i=1,2)$不包含于G的任何完美对集。设$G'=G-\{u_1,v_1,u_2,v_2\}$。由Tutte定理，存在G'的一个顶点子集$S'\subseteq V(G')$满足$O(G'-S')>|S'|$。由于G'有偶数个顶点，$O(G'-S')=|S'|+2k$ $(k\geqslant1)$。

本文1988年12月22日收到

● 中国科学院1986年度青年奖励研究基金资助项目，并部分由中山大学高等学术研究中心基金会资助

选取满足$O(G'-S')=|S'|+2k$ $(k\geqslant 1)$的顶点数最少的集合S'。并设C_1，$C_2\cdots$，$C_{|S'|+2k}$是$G'-S'$的所有奇分支。

对S'中任一点x，C_1，C_2，…，$C_{|S'|+2k}$中至少有3个分支的某些顶点与x相邻。假设此结论不成立。如果只有一个奇分支C的顶点与x相邻，那么，$S''S'=\backslash\{x\}$满足$O(G'-S'')>|S''|$，这与S'的最小性矛盾。若上述情况不成立，则恰有两个奇分支C_i和$C_j(1\leqslant i<j\leqslant|S'|+2k)$的顶点与$x$相邻。这时，$C'=C_i\cup\{x\}\cup C_j$是一个奇分支，并且$S''=S'\backslash\{x\}$满足$O(G'-S'')>|S''|$，这与$S'$的最小性矛盾。

选取满足$O(G-S)=|S|-4+2k$ $(k\geqslant 1)$且$S\supseteq S'$的最小集合S。那么，对$\{u_1, v_1, u_2, v_2, \}\cap S$中的任何顶点$y$，$C_1$，$C_2$，…，$C_{|S|-4+2k}$中至少有3个分支的顶点与$y$相邻.假设上述结论不成立.若只有一个奇分支$C$的顶点与$y$相邻，则$S_1=S\backslash\{y\}$满足$S_1\supseteq S'$及$O(G-S_1)=|S_1|-4+2k$，这与$S$的最小性矛盾。若恰有两个分支$C_i$和$C_j$ $(1\leqslant i<j\leqslant|S|-4+2k)$的顶点与$y$相邻，那么$C'=C_i\cup\{y\}\cup C_j$是奇分支，并且$S_1=S\backslash\{y\}$满足$S_1\supseteq S'$和$O(G-S_1)=|S_1|-4+2k$ $(k\geqslant 1)$，这与S的最小性矛盾。

由G的5-连通性，对G-S中每一个分支C，S中至少有5个顶点与C中顶点相邻。收缩G-S中每一个分支成一点，并且删除$G[S]$中所有边，得到一个偶图G_1，其二分类为$(S, \bar{Y})$。这时，S中所有顶点v满足$d_{G1}(v)\geqslant 3$，并且$\bar{Y}$中所有顶点u满足$d_{G1}(u)\geqslant 5$。由G的5-连通性，$|S|\geqslant 5$。$|\bar{Y}|\geqslant|S|-4+2k$是$G$-$S$的分支数。

由上述讨论可知，$\varepsilon(G_1)\geqslant\frac{1}{2}(3|S|+5|\bar{Y}|)$。由于$|\bar{Y}|\geqslant|S|-4+2k$以及$k\geqslant 1$，不失一般性，设$|\bar{Y}|=|S|-4+2+m=|S|-2+m$ $(m\geqslant 0)$。从而

$$\nu(G_1)=|S|+|\bar{Y}|=2|S|-2+m.$$

并且$\varepsilon(G_1)\geqslant\frac{1}{2}[3|S|+5(|S|-2+m)]=4|S|-5+\frac{5}{2}m>4|S|-8+2m=2(\nu-2)$。这与推论1矛盾。□

给出一个非2-可扩4-连通平面图的例子(见图1)，说明本结果不能被扩展，也不能被扩展到非平面图。

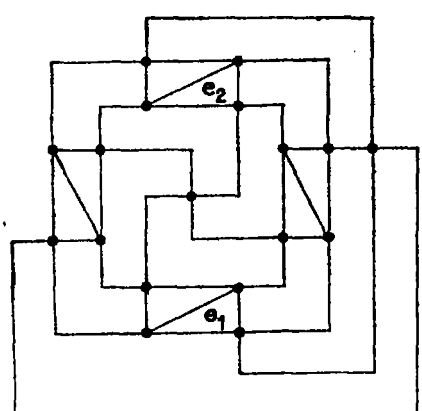

图1

Fig.1

参 考 文 献

[1] Plummer M D, *Discrete Math.*, 31(1980), 201-210

[2] Plummer M D, *Ann. Discrete Math.*, North-Holland, Amsterdan, 1987 (to appear)

[3] Holton D A et al., *On the 2-extendability of planar graphs*, 1988 (Submitted)

[4] Holton D A et al., *2-extendability of 3-polytopes*, 1987 (submitted)

[5] Bondy J A et al., *Graph Theory with Applications*, Macmillan Press, London, 1976

2-Extendability of Planar Graphs

*Lou Dingjun**

Abstract

It is proved that every 5-connected planar graph G with even order is 2-extendable. An example is given to show that the result is sharp.

Keywords perfect matching, n-extendability, cyclic edge connectivity

* Department of Computer Science