第28卷 第4期 中山大学学报(自然科学版) Vol.28 №.4
1989年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

次 接 触 过 程

栾 长 福*

(数学系)

摘 要

提出一类新的粒子系统——次接触过程. 它是近邻粒子系统，并以接触过程为自己的特例. 讨论了它的一些性质和临界现象，指出它既不吸引也不可逆，并且求得该过程存活时，其参数的范围. 这一结果是接触过程相应结论的推广.

关键词 粒子系统，接触过程，临界现象

1 近邻粒子系统

本文所述的次接触过程是一类特别的近邻粒子系统，所谓近邻粒子系统是一个一维的自旋系统。它不同于诸如近紧邻粒子系统(Ising 模型，接触过程，M-V模型等)，因这些系统的粒子之间仅仅近紧邻才具有相互作用。而近邻粒子系统则要把相互作用扩大到近邻了。由于粒子之间有了长程关联，所以研究起来自然就更困难一些。近年来这一领域获得可喜的进展，有关文献见[1—4]。

在近邻粒子系统的研究中，组态$\eta\in X=\{0,1\}^{Z^1}$，当$\eta(x)=1$时，意思是在位置x存在一个粒子，若$\eta(x)=0$，则认为位置x空着. 对于 $x\in Z^1$ 和$\eta\in X$，令$l_x(\eta)$和$r_x(\eta)$分别表示从x到它左右最邻近的粒子的距离，即

$$\left.\begin{aligned} l_x(\eta)&=x-\max\{y<x:\eta(y)=1\}\\ r_x(\eta)&=\min\{y>x:\eta(y)=1\}-x\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

如果对一切$y<x$ 有$\eta(y)=0$，则取$l_x(\eta)=\infty$，如果对一切$y>x$ 有$\eta(y)=0$，则取$r_x(\eta)=\infty$。令$\beta(l,r)$，$1\leqslant l,r\leqslant\infty$是非负的二元函数，并且满足

$$\left.\begin{aligned} &\sup_{l,r}\beta(l,r)<\infty, &&(\text{有限})\\ &\beta(l,r)=\beta(r,l), &&(\text{对称})\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\beta(1,\infty)=\beta(\infty,1)>0 \quad 且\beta(\infty,\infty)=0 \tag{3}$$

那么近邻粒子系统的速度函数为

$$C(x,\eta)=\begin{cases}\beta(l_x(\eta),r_x(\eta)) & 当\eta(x)=0\\ 1 & 当\eta(x)=1\end{cases} \tag{4}$$

本文1988年9月5日收到

* 1988届博士研究生，现在华南理工大学数学系

这里我们考虑组态η适合

$$\sum_x \eta_t(x)<\infty \tag{5}$$

的情况。又称为有限的近邻粒子系统。这时可通过

$$A_t=\{x\epsilon Z^1:\eta_t(x)=1\} \tag{6}$$

把η_t看成以Y为状态空间的连续时间的马尔可夫链[2,3]。这里Y是Z^1中一切有限子集之集。

如果取过程的状态空间为

$$X'=\{\eta\epsilon X:\sum_{x>0}\eta(x)=\sum_{x<0}\eta(x)=\infty\} \tag{7}$$

则称系统为无限的近邻粒子系统。1977年由 Spitzer 提出，Gray 等人作了研究[1,4]。

对于有限的近邻粒子系统，为了保证对一切$t\geqslant 0$，有$A_t\epsilon Y$，再假定

$$\sum_{n=1}^{\infty}\beta(\infty,n)<\infty \tag{8}$$

称系统存活，如果对所有的$A\neq\phi$有

$$\sigma(A)=P^A(A_t=\phi,\ 对一切\ t)>0 \tag{9}$$

否则称系统死光（遍历）。

接触过程是近邻粒子系统的一个特别的情况，这时其生长速度

$$\beta(l,r)=\begin{cases}2\lambda & 当 l=r=1\\ \lambda & 当 l=1,r>1；或 l>1,r=1\\ 0 & 其它\end{cases} \tag{10}$$

关于接触过程的存活与死光问题有一系列的研究，可参见文献[5-8]。

如果令

$$b_n=\sum_{l+r=n}\beta(l,r),\ 当 2\leqslant n<\infty \tag{11}$$

$$b_\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\beta(\infty,n)+\sum_{n=1}^{\infty}\beta(n,\infty) \tag{12}$$

这时Liggett在〔2〕中得到下述结果：

i）如果 $b_n\leqslant 1$，对于$2\leqslant n\leqslant\infty$，则过程死光。

ii）对于每个$b_n=b>2$，存在一个存活的近邻粒子系统，使得$b_n=b$，对一切$2\leqslant n\leqslant\infty$成立。

iii）如果$b_n\geqslant 4$，对所有$2\leqslant n\leqslant\infty$，则过程存活。

在ii)中，存在的非遍历的粒子系统是可逆的。Liggett在〔2〕中猜测：iii)中过程非遍历，参数b_n的下界可进一步地降低。为此，本文提出了一类近邻粒子系统，它是不可逆的，并且可以将其存活的下界降到低于4。这类粒子系统就是次接触过程。

2 次接触过程

所谓次接触过程是指其生长速度

$$\beta(l,r)=\begin{cases}2\lambda & \text{当} l=r=1\\ \lambda & \text{当} l=1,r=2k\text{；或} r=1,l=2k\text{；} k=1,2,\cdots\\ \lambda-\dfrac{\alpha\lambda}{2(l+r)} & \text{当} l=1,r=2k+1\text{；或} r=1,l=2k+1\\ \dfrac{\alpha\lambda}{(l+r)} & \text{当} l=r=2k\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{13}$$

的近邻粒子系统。易见，当$\alpha=0$时，即为接触过程，正因为此，我们称其为次接触过程。易见$\beta(l、r)$使(11)和(12)中的$b_n=2\lambda$，凡$2\leqslant n\leqslant\infty$，为使$\beta(l,r)\geqslant 0$，参数$\alpha$应满足$0\leqslant\alpha\leqslant 8$。

在〔1〕、〔3〕中，讨论了另外几类近邻粒子系统。例如，中心生模型，其生长速度

$$\beta(l,r)\begin{cases}b & \text{当} l=r\\ \dfrac{b}{2} & \text{当} |l-r|=1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\tag{14}$$

均匀生过程，其生长速度

$$\beta(l,r)=\frac{b}{l+r-1}\qquad \text{凡}\quad l,r\geqslant 1\tag{15}$$

但这些过程都不能将接触过程作为自己的特例。

事实上，只要给定一个使(2)、(3)成立的定义在第一象限整点上的一个非负二元函数$\beta(l,r)$，就确定了一个近邻粒子系统，如图1。〔2〕中所研究的模型，即满足(5)、(11)、(12)，它的生长速度所对应的图如图2。表现为，在那些以点(1,1)为直角顶点

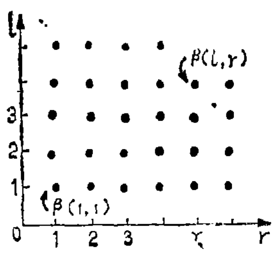

图　1

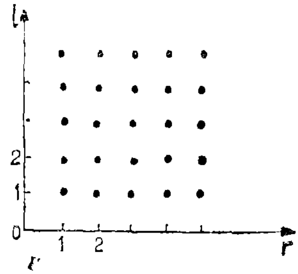

图　2

所构成的等腰直角三角形中，斜边上点的质量之和与直角顶点的质量相等，易知接触过程的生长速度的图形为图3。这时，图形除直线$r=1$和$l=1$之外，其它地方的质量全为

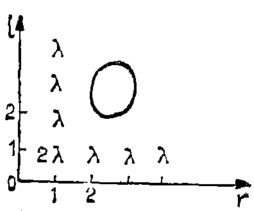

图　3

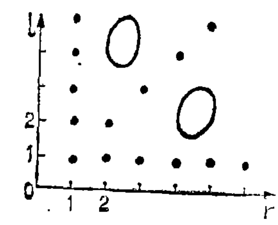

图　4

零。由此可见它确实是一种特别的 Liggett 在〔2〕中提出的近邻粒子系统。而我们所提出的次接触过程的图形是图4，它与图3相比，在第一象限的对角线上多出了一串质量。因为对角线上的点使得 $l=r$，所以这种质量可以了解为粒子间的某种"共鸣"作用。

尽管次接触过程从它生长函数的图形来看并不太复杂，然而，它已经失去了接触过程所具有的吸引性。同时也不是可逆过程。现将其写成定理的形式。

定理 1 i)次接触过程不具备吸引性质 ii)次接触过程是不可逆过程。

证明 先证i)。由〔3〕中第Ⅲ章的定义2.1知，称以 $C(x,\eta)$ 为速度函数的自旋系统是吸引的，必须使得，对于任意两个组态 η 和 ζ，只要有 $\eta\leqslant\zeta$，就得有

$$C(x,\eta)\leqslant C(x,\zeta), \quad \text{当}\eta(x)=\zeta(x)=0$$

和

$$C(x,\eta)\geqslant C(x,\zeta), \quad \text{当}\eta(x)=\zeta(x)=1$$

因为次接触过程的死亡速度与 x 点以外的状态无关，因此，如果组态 $\eta\leqslant\zeta$，则应有

$$\beta(x,\eta)\leqslant\beta(x,\zeta) \tag{16}$$

然而，如果取

$$\eta=\cdots01000\underset{x}{0}00010\cdots$$

$$\zeta=\cdots01000\underset{x}{0}00110\cdots$$

则显然有 $\eta\leqslant\zeta$。但是这时，$\beta(x,\eta)=\beta(4,4)=\alpha\lambda/8$ 当 $\alpha\neq0$，即非接触过程时，有 $\beta(x,\eta)>0$。而 $\beta(x,\zeta)=\beta(4,3)=0$，所以(16)式不成立，故次接触过程不是吸引的。

再证ii)，由〔3〕知，若以 $\beta(l,r)$ 为生长速度的近邻粒子系统可逆，则此二元函数必可表为

$$\beta(l,r)=\beta(l)\beta(r)/[\beta(l+r)] \tag{17}$$

这里 $1\leqslant l,r<\infty$，$\beta(l,\infty)=\beta(\infty,l)=\beta(l)$。显然，此处，对 $\forall l=1,2,\cdots$，$\beta(l)$ 均不得为0。然而对次接触过程而言，当 $l\geqslant2$ 时，$\beta(l,\infty)$ 均为零。因此次接触过程不可逆。

定理证毕。

次接触过程作为接触过程的拓广和近邻粒子系统的特例而引进，我们的目的是想通过对该过程的研究，从而推进对接触过程和近邻粒子系统的认识。因为次接触过程介于这二者之间。

3 次接触过程的存活问题

本节证明了，当过程的参数 $\lambda\geqslant4\widetilde{\lambda}_c(4-\alpha)^{-1}$，$0\leqslant\alpha<4$ 时，次接触过程存活。这里 $\widetilde{\lambda}_c$ 是接触过程的临界点。易见当 $\alpha=0$ 时，即当 $\lambda\geqslant\widetilde{\lambda}_c$ 时，接触过程存活。因此，本结果是〔3〕的推广。同时，若将次接触过程看成近邻粒子系统，则其参数 λ 相当于近邻粒子系统的参数 $\frac{b}{2}$。那么，我们的结果又可表为，当 $b>8\widetilde{\lambda}_c(4-\alpha)^{-1}$ 时，次接触过程存活。易见，若要使 $b<4$，只要使 $0\leqslant\alpha<2(2-\widetilde{\lambda}_c)$ 即可。若取 $\widetilde{\lambda}_c$ 为1.65（$\widetilde{\lambda}_c$ 的数值解）得到，当 $0\leqslant\alpha<0.7$ 且 $\lambda>4\widetilde{\lambda}_c(4-\alpha)^{-1}$ 时，这样一个近邻粒子系统的子类，当参数 $b<4$ 时，便能存活。值得一提的是它们均不可逆，因此，不同于〔2〕所构造的那种 $b>2$ 存活的可逆的粒子系统。

本节主要结果的证明方法与〔2〕类似。为此先给出如下记号。

对于$A\epsilon Y$，令

$$h(A)=\nu_{\tilde{\lambda}}\{\eta:\eta(x)=1,\ \text{for some }x\epsilon A\}$$

如果η_t是接触过程，则当$\tilde{\lambda}>\tilde{\lambda}_c$时过程存活，见〔3〕中的第六章的定理1.33的$(b)$。这里$\nu_{\tilde{\lambda}}$是参数为$\tilde{\lambda}$（$>\tilde{\lambda}_c$)的接触过程的上不变测度。

再令

$$g_A(x)=h(A\cup\{x\})-h(A)=\nu_{\tilde{\lambda}}\{\eta:\eta(x)=1\ \text{and}\ \eta(y)=0,\ \text{for all }y\epsilon A\}$$

于是主要结果陈述为

定理2 若次接触过程A_t的参数

$$\lambda\geqslant 4\tilde{\lambda}_c(4-\alpha)^{-1}$$

则该过程存活，这里$\tilde{\lambda}_c$为接触过程的临界点。

证明 令B_t为参数$\tilde{\lambda}>\tilde{\lambda}_c$的接触过程。其生长速度记为$\tilde{\beta}(l,r)$。那么

$$\tilde{\beta}(l,r)=\begin{cases}2\tilde{\lambda} & \text{当}l=r=1\\ \tilde{\lambda} & \text{当}l=1\ r>1;\ \text{或}r=1,l>1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

由〔3〕中第6章的定理1.10的(b)知，对所有的$A\epsilon Y$有

$$\frac{d}{dt}E^Ah(B_t)|_{t=0}\geqslant 0 \tag{18}$$

因为次接触过程A_t与接触过程B_t有相同的灭率，所以

$$\frac{d}{dt}E^Ah(A_t)|_{t=0}-\frac{d}{dt}E^Ah(B_t)|_{t=0}$$

$$=\sum_{x\bar{\epsilon}A}[\beta(l_x(A),r_x(A))-\tilde{\beta}(l_x(A),r_x(A))]g_A(x) \tag{19}$$

下面我们将指出上式非负。所要证明的是：对于A^c中每个最大的连通子集（即不被为1的点隔开），将子集中的那些x对应的项求和均为非负。由于次接触过程的生率仅在那些非为0的地方才与接触过程不同。因此(19)可写成

$$\sum_{\substack{x\epsilon A^c\\ \tilde{\beta}=0}}\beta(l_x(A),r_x(A))g_A(x)+\sum_{\substack{x\epsilon A^c\\ \tilde{\beta}\neq 0}}[\beta(l_x(A),r_x(A))-\tilde{\beta}(l_x(A),r_x(A))]g_A(x) \tag{20}$$

对于A^c中的某个连通子集，不妨设其中元素的个数为n，那么当$n\geqslant 2$为偶数时，$n+1$为奇数，这时$l+r$为奇数，于是(20)式为0。当$n\geqslant 2$为奇数时，(20)式的第一项的求和仅仅只有一项，即$\beta(\frac{n+1}{2},\frac{n+1}{2})g(\frac{n+1}{2})=\frac{\lambda\alpha}{n+1}g(\frac{n+1}{2})\geqslant 0$。第二项的求和也只有两项，即

$$[\beta(1,n)-\tilde{\beta}(1,n)]g(1)+[\beta(n,1)+\tilde{\beta}(n,1)]g(n) \tag{21}$$

由$\beta(l,r)$的对称性知，(21)式为

$$[\beta(1,n)-\widetilde{\beta}(1,n)][g(1)+g(n)]$$

由定理2的假设推出

$$\beta(1,n)=\lambda-\frac{1}{2}\frac{\lambda\alpha}{l+r}\geqslant\widetilde{\lambda}_c,$$

即 $\beta(1,n)\geqslant\widetilde{\beta}(1,n)$。因此(20)式的两项均非负。也就是(19)式非负。再由(18)式得到

$$\frac{d}{dt}E^A h(A_t)|_{t=0}\geqslant 0$$

对一切$A\epsilon Y$成立。故

$$E^A h(A_t)\geqslant h(A)>0$$

对一切 $t\geqslant 0$和所有的$A\neq\phi$成立。因此次接触过程A_t存活。证毕

参考文献

[1] Bramsan M et al., *The Annals of Probability*, 9(1981), 885~890

[2] Liggett T M, *Z.W.V.G.*, 68(1984), 65~73

[3] Liggett T M, *Interacting Particle Systems*, New York Heideberg Berlin, Springer, 1985

[4] Spitzer F, *Ann. of Prob.*, 9(1981), 3, 349~364

[5] Brower R C et al., *Physics Letters*, 78B(1978), 213~219

[6] Durrett R et al., *The Annals of Probability*, 11(1983), 1~15

[7] Dai Yonglong et al., *Acta. Math. Sinica*, 2(1986), 1,92~104

[8] Liggett T M, *Probability Theory*, 74(1987) 505~528

Quasi-Contact Process

*Luan Changfu**

Abstract

We introduce a new particle system-Quasi-contact process. It is a finite nearest partical system. The contact process is its special case. We discuss its simple properties and critical phenomena. It is not only nonattractive, but also non-reversible. The survival of this system is discussed.

Keywords particle systems, contact process, critical phenomena

* Department of Mathematics. South China University of Technology