

周期性弹性支座上的无限长梁 静力问题的精确解*

蔡承武 张焦宏 李 鹰
(应用力学与工程系)

摘 要

基于无限长链式周期结构可以认为是相应的回转周期结构当子结构数目趋于无穷时的极限情形,本文应用 U 变换,得到了在任意载荷条件下封闭形式的精确解.对两种典型载荷,文中给出了解答的表达式;导出了近似模型的相对误差依赖于无量纲弹簧常数 K 的显式函数关系.

关键词 U 变换, 周期性弹性支座, 精确方法

1 前 言

关于在周期性刚性支座上连续梁的静、动力分析,已有不少方法,如差分方程方法^[1]、迁移矩阵法^[2]、波传播法^[3]等;但以上诸方法均难以获得无限跨连续梁在任意载荷作用下,封闭形式的精确解.文[4]、[5]中曾用 U 变换方法研究回转周期结构在任意静、动载荷作用下的结构分析问题.最近,本文作者与张佑启、陈汉铨一起应用 U 变换方法分析无限长连续梁的问题,将无限长连续梁作为回转周期结构当其子结构数趋于无穷时的极限情形处理,静力分析^[6]与动力响应分析^[7]均已获得解决.

本文将 U 变换法应用于具有周期性弹性支承上的无限长梁的静力分析中,求得了其它方法难以得到的任意载荷作用下的精确解.作为工程应用的例子,将本文给出的精确解与按平均化的弹性基础梁模型计算得到的近似解^[8]进行了比较.对两种典型载荷条件,导出了相对误差与无量纲弹簧常数 K 之间的显式函数关系.

2 基本思想与控制方程

考虑一具有均匀弯曲刚度 EI 的无限长梁支承在周期性分布的弹簧上,如图1所示.图中 k 、 l 分别表示弹簧刚度与两相邻弹簧之间的距离;整数表示子结构编号.

众所周知,在有限范围内受到任意载荷的作用,均不会在连续梁的两个无穷远端点处引起挠度、转角与内力.反之,在无穷远端点处的边界条件亦不会对有限部份产生影响.基于这一理由,可以假想地将两个无穷远端点“连接”起来;即将无限长链式周期结构看作是具有相同子结构的回转周期结构当子结构数目趋于无穷时的极限情形.因

本文1989年5月17日收到

*国家自然科学基金资助项目

0114187

此, 可分两步求解: ①对具有回转周期性的 N 跨离散弹簧支承梁, 在给定载荷下求解; ②令子结构数 N 趋于无穷, 求极限解。

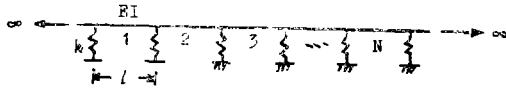


图1 无限长弹性支承梁

Fig. 1 Infinite continuous beam with peirodic elasticity supports

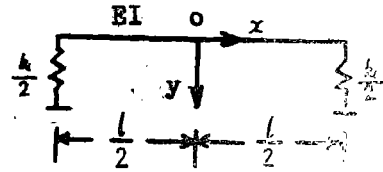


图2 子结构与局部坐标

Fig. 2 Substructure with local co-ordinate system

对每一子结构建立局部坐标 oxy , 如图2所示。在各自的局部坐标中, 各子结构的平衡方程与相邻子结构间的连续条件取相同的形式, 即

$$EI \frac{d^4 w_m(x)}{dx^4} = F_m(x) \quad -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} w_m\left(\frac{l}{2}\right) &= w_{m+1}\left(-\frac{l}{2}\right), & w'_m\left(\frac{l}{2}\right) &= w'_{m+1}\left(-\frac{l}{2}\right) \\ w''_m\left(\frac{l}{2}\right) &= w''_{m+1}\left(-\frac{l}{2}\right), & m &= 1, 2, \dots, N \\ -EI w'''_m\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{k}{2} w_m\left(\frac{l}{2}\right) &= -EI w'''_{m+1}\left(-\frac{l}{2}\right) - \frac{k}{2} w_{m+1}\left(-\frac{l}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, $F_m(x)$, $w_m(x)$ 表示第 m 个子结构的横向载荷与挠度函数; $w_{N+1}(x) \equiv w_1(x)$ 。

作 U 变换^[6], 令

$$w_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=1}^N e^{i(k-1)m\Psi} q_m(x) \quad (3)$$

或

$$q_m(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-i(k-1)m\Psi} w_k(x) \quad (4)$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, $\Psi = 2\pi/N$ 。

微分方程组(1)与(2)变为:

$$EI \frac{d^4 q_m(x)}{dx^4} = f_m(x) \quad -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2}, \quad m=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} q_m\left(\frac{l}{2}\right) &= e^{im\Psi} q_m\left(-\frac{l}{2}\right), & q'_m\left(\frac{l}{2}\right) &= e^{im\Psi} q'_m\left(-\frac{l}{2}\right), \\ q''_m\left(\frac{l}{2}\right) &= e^{im\Psi} q''_m\left(-\frac{l}{2}\right) \\ q'''_m\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{K}{2l^3} q_m\left(\frac{l}{2}\right) &= e^{im\Psi} \left[q'''_m\left(-\frac{l}{2}\right) + \frac{K}{2l^3} q_m\left(-\frac{l}{2}\right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, $K = kl^3/EI$ 为无量纲弹簧常数, q_m 为第 m 个广义位移。

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N e^{-i(k-1)m\psi} F_k(x) \quad (7)$$

从方程(5)、(6)解得 $q_m(x)$ 后, 代入(3)式便可得到 $w_k(x)$ 。当 N 趋于无穷时, 挠度函数的极限^[7]为

$$W_k(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} w_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} [e^{i(k-1)\theta} q(\theta, x)] d\theta \quad (8)$$

其中

$$q(m\phi, x) \equiv \sqrt{N} q_m(x) \quad (9)$$

3 两种典型载荷作用下的精确解

3.1 某一跨作用均布载荷 p

定义受载荷的子结构为第一子结构, 即

$$F_1(x) = p; F_2(x) = F_3(x) = \dots = F_N(x) = 0 \quad (10)$$

将(10)式代入(7)式便得广义载荷 $f_m = p/\sqrt{N}$; 然后代入方程(5)的右端, 从方程(5)、(6)不难解得:

$$q_m(x) = \frac{p l^4}{384 EI \sqrt{N}} \left(C_{m0} + C_{m1} \frac{x}{l} + C_{m2} \frac{x^2}{l^2} + C_{m3} \frac{x^3}{l^3} + 16 \frac{x^4}{l^4} \right) \quad (11)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} C_{m0} &= 1 + [8(5 - K_1) \cos m\phi + 8(K_1 + 7)] / \Delta_m \\ C_{m1} &= 8i \sin m\phi (\cos m\phi + 11 - 2K_1) / \Delta_m \\ C_{m2} &= 24 \{ 1 - 4[(K_1 - 1) \cos m\phi + 1 + 3K_1] / \Delta_m \} \\ C_{m3} &= 32i \sin m\phi (\cos m\phi + 2K_1 - 1) / \Delta_m \\ \Delta_m &= \cos^2 m\phi + (4K_1 - 2) \cos m\phi + 8K_1 + 1 \\ K_1 &= K/48 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

以 $q(m\phi, x) = \sqrt{N} q_m(x)$ 代入积分表达式(8), 经积分后可得各子结构的挠度函数。受载跨的挠度函数为:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= \frac{p l^4}{384 EI} \left\{ \left[1 + \frac{4}{3K_1 K_3} \left(\frac{K_1 + 1}{K_2} + 6 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[24 - \frac{16}{K_1 K_3} \left(\frac{K_1 + 1}{K_2} + 2K_1 \right) \right] \frac{x^2}{l^2} + 16 \frac{x^4}{l^4} \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

其中

$$K_2 = \sqrt{\frac{K_1 + 1}{3K_1}}, \quad K_3 = \sqrt{\frac{4}{3} + 2K_2} \quad (14)$$

由关系式 $M(x) = -EI \frac{d^2 W}{dx^2}$ 可得对应的弯矩分布。

最大挠度与最大弯矩均发生在受载跨的中点, 其值为:

$$\left. \begin{aligned} W_{\max} = W_1(o) &= \frac{pl^4}{384EI} \left[1 + \frac{4}{3K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 6 \right) \right] \\ M_{\max} = -EIW_1''(o) &= \frac{pl^2}{24} \left[\frac{2}{K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 2K_1 \right) - 3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3.2 某一跨的中点作用一集中力P

各子结构的载荷函数为

$$F_1(x) = P\delta(x), F_2(x) = F_3(x) = \dots = F_N(x) = 0 \quad (16)$$

按照上题所阐明的步骤,不难求得各子结构的挠度函数,受载跨的挠度函数为

$$\begin{aligned} W_1(x) = \frac{Pl^3}{12EI} & \left[\frac{1}{12K_1K_3} \left(3 + \frac{3}{4}K_1 + \frac{1+K_1}{K_2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4K_1K_3} \left(3K_1 + \frac{2+2K_1}{K_2} \right) \frac{x^2}{l^2} + \frac{|x|^3}{l^3} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

最大挠度与最大弯矩均发生在载荷作用点,其值为

$$\left. \begin{aligned} W_{\max} = W_1(o) &= \frac{Pl^3}{144EIK_1K_3} \left(3 + \frac{3}{4}K_1 + \frac{1+K_1}{K_2} \right) \\ M_{\max} = -EIW_1''(o) &= \frac{Pl}{24K_1K_3} \left(3K_1 + \frac{2+2K_1}{K_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

4 与近似方法结果的比较

对于具有周期性弹性支座的梁,当支座较密(支座间距远小于挠度曲线波长)时,通常工程上当作弹性基础梁处理(即将离散弹性支座用连续的Winkler地基代替,对应的地基常数为 $\bar{K} = k/l$),这种工程方法的近似程度缺乏精确的定量分析。本文将利用上节得到的结果与弹性基础梁的对应结果进行比较。

4.1 某一跨作用均布载荷p

无限长弹性基础梁,在长度为 l 的一段上作用有均布载荷 p 。最大挠度与最大弯矩均发生在载荷作用段的中点。从文[8]可得有关解答,若用对应的离散弹性支座梁的参数表示,最大挠度与最大弯矩分别可表为

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{\max} &= \frac{pl^4}{EIK} \left[1 - e^{-(\sqrt{K}/2\sqrt{2})} \cos(\sqrt{K}/2\sqrt{2}) \right] \\ \bar{M}_{\max} &= \frac{pl^2}{\sqrt{K}} e^{-(\sqrt{K}/2\sqrt{2})} \sin(\sqrt{K}/2\sqrt{2}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

以 e_1 、 e_2 分别表示近似值 \bar{W}_{\max} 、 \bar{M}_{\max} 的相对误差,表达式为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \left[1 + \frac{4}{3K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 6 \right) - \frac{384}{K} \left(1 - e^{-K_4} \cos K_4 \right) \right] / \left[1 + \frac{4}{3K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 6 \right) \right] \\ e_2 &= \left[\frac{2}{K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 2K_1 \right) - 3 - \frac{24}{\sqrt{K}} e^{-K_4} \sin K_4 \right] / \left[\frac{2}{K_1K_3} \left(\frac{K_1+1}{K_2} + 2K_1 \right) - 3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

其中, $K_4 = \sqrt{K}/2\sqrt{2}$;从(20)式可以发现,相对误差仅依赖于无量纲弹簧常数 K 。

通过极限运算,可以证明

$$\lim_{K \rightarrow 0} e_1 = 0; \quad \lim_{K \rightarrow 0} e_2 = 0 \tag{21}$$

因此，当 K 很小时，近似方法是正确的；但当 K 增大时，误差显著增大（见图 3）。

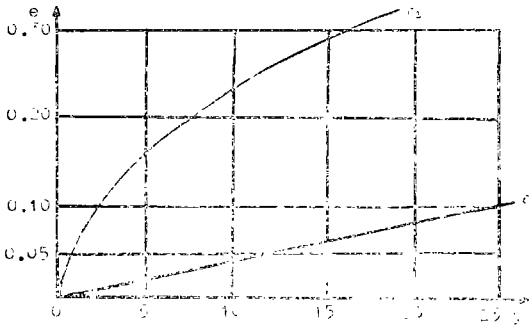


图 3 均布载荷作用下近似模型的挠度与弯矩的相对误差
Fig.3 Relative error versus K for the deflection, moment obtained by the approximate model with uniform load applied on a substructure

以铁轨为例，取文[9]给出的数据， $l = 66\text{cm}$ ， $\bar{K} = 300\text{kg/cm}^2$ ($k = 19800\text{kg/cm}$)， $EI = 366 \times 10^7\text{kg} \cdot \text{cm}^2$ ，可以计算得到 $K = 1.56$ ，代入(20)式便得

$$e_1 = 0.459\%; \quad e_2 = 7.75\%$$

4.2 某一跨的中点作用一集中力 P

无限长弹性基础梁作用一集中力的情形，最大挠度与最大弯矩均发生在集中力作用点，它们的值分别为

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{\max} &= \frac{\sqrt{2} Pl^3}{4EI} K^{-\frac{3}{4}} \\ \bar{M}_{\max} &= \frac{\sqrt{2}}{4} PlK^{-\frac{1}{4}} \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

它们的相对误差为

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \left(3 + \frac{3}{4} K_1 + \frac{1+K_1}{K_2} - 36\sqrt{2} K_1 K_2 K^{-\frac{3}{4}} \right) / \left(3 + \frac{3}{4} K_1 + \frac{1+K_1}{K_2} \right) \\ e_2 &= \left(3K_1 + \frac{2+2K_1}{K_2} - 6\sqrt{2} K_1 K_2 K^{-\frac{1}{4}} \right) / \left(3K_1 + \frac{2+2K_1}{K_2} \right) \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

仍以铁轨为例，以 $K = 1.56$ 代入(23)式得

$$e_1 = 0.665\%; \quad e_2 = 5.61\%$$

e_1 、 e_2 对 K 的依赖关系表示在图 4 中。

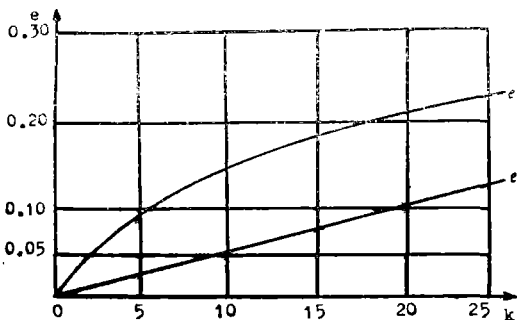


图 4 集中力作用下近似模型的挠度与弯矩的相对误差
Fig.4 Relative error versus K for the deflection, moment obtained by the approximate model with a concentrated load

5 小 结

本文研究了在周期性弹性支座上的无限长梁的静力问题。对一跨作用有均布载荷与跨中作用有集中力两种情形给出了精确解的表达式,且本文的方法不受载荷条件的限制。作为具体应用,研究了以弹性地基代替周期性弹性支承所产生的误差,相对误差唯一依赖于无量纲弹簧常数 K ;无论是最大挠度还是最大弯矩,相对误差均随着 K 趋于零而趋于零。但是,当 K 较大时,将产生显著误差。最大弯矩的误差比最大挠度的误差大得多。对两种载荷条件,文中给出了相对误差依赖于 K 的显式函数关系。

应用本文的方法也可以分析动力响应问题,这将在以后的论文中讨论。

参 考 文 献

- [1] Miles J W, *Proc. Am. Soc. Civil Engurs.*, 82 (1956) EM1, 1
- [2] Lin Y K et al., *Trans. ASME*, 69-Vibr.,-17, 1969, 1
- [3] Sen Gupta G, *J. Sound vib.*, 13 (1970), 1
- [4] 蔡承武等, 中山大学学报(自然科学版), 1983, 3
- [5] 蔡承武, 中山大学学报(自然科学版), 1986, 2
- [6] Cheung Y K et al., *Journal of ASCE, Engineering Mechanics*, 115 (1989), 2
- [7] Cai Chengwu et al., *J. Sound vib.*, 123 (1988), 2
- [8] S.铁摩辛柯著(汪一麟译), 材料力学, 科学出版社, 1979
- [9] 佐藤裕著(肇英译), 轨道力学, 中国铁道出版社, 1981

On Exact Solutions for an Infinite Uniform Beam with Periodic Elastic Supports under Arbitrary Loads

Cai Chengwu Zhang Jiaohong Li Ying

Abstract

The Static analysis of the infinite uniform beams resting on periodic elastic supports and subjected to arbitrary loads is studied by the U transformation method. The system considered can be regarded as a rotationally periodic structure with infinite number of substructures. The closed form solutions for the cases of uniformly distributed and concentrated load acting on a substructure are found and compared with those obtained by the theory of the beams on elastic foundation. It is shown that the relative error is only dependent on the value of the nondimensional spring constant K .

Keywords U transformation, periodic elastic supports, exact method

Department of Applied Mechanics and Engineering