中山大学学报（自然科学版）
第28卷 第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.4
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

·研究简报·

随机测度存在与唯一性定理的另一形式

吴先伟
（数学系）

摘 要

本文得到形式上与Jagers（1974）不同的随机测度存在与唯一性定理.

关键词 随机测度，存在定理

本文采用的记号和概念，除特别说明外，取自〔1〕.

设X是一满足第二可数公理的局部紧Hausdorff空间，因而是σ紧的，即有一串紧集$\{k_j\}_1^\infty$，$\bigcup_1^\infty k_j=X$，且可选为$k_j\subset k^0_{j+1}$. X可距离化为Polish 空间. $\mathscr{B}$(X)是的X Borel集类. 设$\mathscr{D}$是X的一个可数拓朴基，$\mathscr{D}$中元素有界，且把$\mathscr{D}$选得对有限并和有限交是封闭的，并包含空集. 设a是$\mathscr{D}$和上述$\{k_j\}_1^\infty$所产生的环. 显然a可数，a产生的σ环即$\mathscr{B}$（X）. $\mathscr{B}$（X）中全体有界集记为$\mathscr{B}$，显然$a\subset\mathscr{B}$.（X，$\mathscr{B}$(X)）上全体局部有限测度记为M，M在淡拓朴下的Borel集类记为$\mathscr{M}$. 集合T的全体有限子集记为fT.

文献〔1〕、〔2〕中有几个形式上稍为不同的随机测度存在与唯一性定理. 设投影系为$\{P^U:U\epsilon f\varepsilon\}$.〔1〕的存在与唯一性定理(定理1)中集类$\varepsilon$是由$\mathscr{D}$和$\{k_j\}_1^\infty$所产生的代数.〔2〕的存在性定理有两个：定理5.3中的集类ε是$\mathscr{B}$中的DC-环；定理5.4中的集类$\varepsilon=\mathscr{B}$.〔2〕的唯一性定理（定理3.1）中的集类ε是产生$\mathscr{B}$的半环. 本文的存在与唯一性定理有定理1和定理2两个，定理1中的集类$\varepsilon=a$，即由$\mathscr{D}$和$\{k_j\}_1^\infty$所产生的环，这与〔1〕的定理1差别不大. 定理2的投影系是$\{P^U:U\epsilon fa$，U中诸元素$A_1,\cdots,A_n$互不相交$\}$. 而〔1〕和〔2〕中的投影系是$\{P^U:U\epsilon f\varepsilon\}$. 因而，本文定理2与上述文献〔1，2〕中的存在与唯一性定理有较大的不同. 在某些情形下应用本文定理2将方便得多. 例如，研究随机点过程ξ的复合过程η(见〔2〕)，就不必研究有限维分布族$\{P^U:U\epsilon f\varepsilon\}$，只须研究$\{P^U:U\epsilon fa$，$U$中诸元素$A_1,\cdots,A_n$互不相交$\}$即可.

仿〔1〕定理1的证明，可得到下面定理1.

定理1 设$\{P^U:U\epsilon fa\}$是一投影系，满足

若A，$B\epsilon a$ 且$A\cap B=\phi$，则

$$P^{A,B,A\cup B}\{(x,y,z)\epsilon R^3_+;\ x+y=z\}=1 \tag{1}$$

若$\{A_n\}_1^\infty\subset a$且$A_n\downarrow\phi$，则对任意 $t>0$，

本文1988年4月30日收到

$$\lim_{n\to\infty} P^{A_n}((0,t]) = 0 \tag{2}$$

若$A\in a$，则 $P^A(R_+) = 1$ （3）

则存在 $(M,\mathscr{M})$上唯一的概率测度 P，使得对任意 $A_1,\cdots,A_n\in a$，$B\in\mathscr{B}(R^n_+)$，有

$$P\{\mu\in M;\ (\mu A_1,\ \cdots,\ \mu A_n)\in B\} = P^{A_1,\cdots,A_n}(B) \tag{4}$$

下述性质以后称为条件Ⅰ：设 $A_1,\cdots,A_n\in a$，$A_1,\cdots,A_n$ 互不相交；$A'_1,\cdots,A'_m\in a$，$A'_1,\cdots,A'_m$互不相交，且有$A_i = \bigcup_{A'_j\subset A_i} A'_j$ 凡 $1\le i\le n$，令

$$\varphi_i(\nu(A'_1),\cdots,\nu(A'_m)) = \sum_{A'_j\subset A_i} \nu(A'_j),\ 1\le i\le n.$$

$$\varphi = (\varphi_1,\cdots,\varphi_n)$$

则成立等式 $P^{A_1,\cdots,A_n} = P^{A'_1,\cdots,A'_m}\circ\varphi^{-1}$。

注意φ是 $R^m_+\to R^n_+$的可测映射。设P是$(M,\mathscr{M})$上概率测度，P的边缘分布记为 P_U，$U\in f\mathscr{B}(X)$。令$P^U = P_U$，$U\in fa$。易知P^U满足性质Ⅰ。

定理 2　设 $\{P^{A_1,\cdots,A_n}:\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa$，$A_1,\cdots,A_n$ 互不相交$\}$是一投影系，满足（2），（3）和条件Ⅰ，则存在$(M,\mathscr{M})$上唯一的概率测度P，使对任意$\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa$，$A_1,\cdots,A_n$互不相交，

$$P_{A_1,\ldots,A_n} = P^{A_1,\cdots,A_n} \tag{5}$$

我们将用定理 1 证明定理 2。为此，先证明两个辅助命题。

设$A_1,\cdots,A_n\in a$，存在互不相交的 $A'_1,\cdots,A'_m\in a$，使得$A_i = \bigcup_{A'_j\subset A_i} A'_j$ 凡$1\le i\le n$，且$\bigcup_1^m A'_j = \bigcup_1^n A_i$，则称 $A'_1,\cdots,A'_m$是$A_1,\cdots,A_n$的一个分割。m 取最小值的分割称为最粗分割。

命题 3　设$A_1,\cdots,A_n\in a$，则它们有唯一的最粗分割。

证明　用数学归纳法。设$A_1\in a$。令 $A'_1 = A_1$。显然 A'_1是A_1唯一的最粗分割。假设$A_1,\cdots,A_k$，$A_{k+1}\in a$，$A_1,\cdots,A_k$有唯一最粗分割$B_1,\cdots,B_q$。令$\mathscr{A}_1 = \{A_{k+1}\cap B_i:\ 1\le i\le q\}$，$\mathscr{A}_2 = \{B_i\setminus A_{k+1}:\ 1\le i\le q\}$，$B = A_{k+1}\setminus\bigcup_{i=1}^q B_i$。设 $(\mathscr{A}_1\cup\mathscr{A}_2\cup\{B\})\setminus\{\phi\} = \{A'_1,A'_2,\cdots,A'_m\}$。易知$A'_1,A'_2,\cdots,A'_m$ 是$A_1,\cdots,A_k,A_{k+1}$ 的唯一最粗分割。

设$A_1,\cdots,A_n\in a$，其最粗分割是 $A'_1,\cdots,A'_m$。定义可测映射 g_i：$R_+^{\{A'_j\}_1^m} \longrightarrow R_+^{\{A_i\}}$ （$1\le i\le n$）和映射g：$R_+^{\{A'_j\}_1^m} \longrightarrow R_+^{\{A_i\}_1^n}$如下：

$$g_i(\{\nu(A'_j)\}_1^m) = \sum_{\substack{A'_j\subset A_i\\ 1\le j\le m}} \nu(A'_j) \tag{6}$$

$$g=(g_1,\cdots,g_n) \qquad (7)$$

命题4　设 $\{P^{A_1,\cdots,A_n}:\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa,\ A_1,\cdots,A_n$ 互不相交$\}$是一投影系，满足条件Ⅰ。则 $\{P^{A_1,\cdots,A_n}:\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa\}$是一投影系，满足(1)。其中 $P^{A_1,\cdots,A_n}=P^{A'_1,\cdots,A'_m}\circ g^{-1}$，$A'_1,\cdots,A'_m$是$A_1,\cdots,A_n$的最粗分割，$g$由(7)定义。

证明　i)易知命题中关于$P^{A_1,\cdots,A_n}$的定义不含混，$\{P^{A_1,\cdots,A_n}:\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa\}$满足对称性要求。

ii)　设$\{A_1,\cdots,A_{n+q}\}\in fa$，$A_1,\cdots,A_n$的最粗分割是$A'_1,\cdots,A'_m$，$A_1,\cdots,A_{n+q}$的最粗分割是$\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s$。定义可测映射$\dot{g}_i(1\le i\le n+q)$如下：

$$\dot{g}_i(\nu(\tilde{A}_1),\cdots,\nu(\tilde{A}_s))=\sum_{\tilde{A}_j\subset A_i}\nu(\tilde{A}_j)$$

令　$\dot{g}=(\dot{g}_1,\cdots,\dot{g}_n)$，$h=(\dot{g},\dot{g}_{n+1},\cdots,\dot{g}_{n+q})$。对任意 $B\in\mathscr{B}(\bar{R}_+^{\{A_i\}_1^n})$，令

$B_1=B\times\bar{R}_+^{\{A_i\}_{n+1}^{n+q}}$，则

$$P^{A_1,\cdots,A_n,A_{n+1},\cdots,A_{n+q}}(B_1)=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ h^{-1}(B_1)$$

$$=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ(\dot{g},\dot{g}_{n+1},\cdots,\dot{g}_{n+q})^{-1}(B\times\bar{R}_+^{\{A_i\}_{n+1}^{n+q}})$$

$$=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}(\dot{g}^{-1}(B)\cap\bigcap_{i=n+1}^{n+q}\dot{g}_i^{-1}(\bar{R}_+^{\{A_i\}}))=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ\dot{g}^{-1}(B)$$

因此，若能证得

$$P^{A'_1,\cdots,A'_m}\circ g^{-1}=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ\dot{g}^{-1} \qquad (8)$$

则证得$\{P^{A_1,\cdots,A_n}:\{A_1,\cdots,A_n\}\in fa\}$为投影系，由最粗分割的定义知，$A'_j=\bigcup_{\tilde{A}_r\subset\tilde{A}'_j}\tilde{A}_r$，$1\le j\le m$。

令　$$\varphi_j(\nu(\tilde{A}_1),\cdots,\nu(\tilde{A}_s))=\sum_{\tilde{A}_r\subset\tilde{A}'_j}\nu(\tilde{A}_r),\ 1\le j\le m.$$

$$\varphi=(\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_m)$$

则$\dot{g}=g\circ\varphi$。因而 $P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ\dot{g}^{-1}=P^{\tilde{A}_1,\cdots,\tilde{A}_s}\circ\varphi^{-1}\circ g^{-1}=P^{A'_1,\cdots,A'_m}\circ g^{-1}$(第二个等号用到性质Ⅰ)，这就证得(8)式。

iii)　设A_1，$A_2\in a$，$A_1\cap A_2=\phi$。则A_1，A_2，$A_1\cup A_2$的最粗分割是A_1，A_2。令$g_1(\nu(A_1),\nu(A_2))=\nu(A_1)$，$g_2(\nu(A_1),\nu(A_2))=\nu(A_2)$，$g_3(\nu(A_1),\nu(A_2))=\nu(A_1)+\nu(A_2)$，$g=(g_1,g_2,g_3)$。则$P^{A_1,A_2,A_1\cup A_2}=P^{A_1,A_2}\circ g^{-1}$。于是

$$P^{A_1,A_2,A_1\cup A_2}\{(x_1,x_2,x_3)\in R_+^3;\ x_1+x_2=x_3\}$$

$$=P^{A_1,A_2}\circ g^{-1}\{(x_1,x_2,x_3)\in R_+^3;\ x_1+x_2=x_3\}=P^{A_1,A_2}(R_+^2)=1$$

于是(1)式满足

定理 2 的证明　存在性由定理1和命题 4 立得。往证唯一性。设概率测度 P' 也满足定理的要求，对任意 $A_1,\cdots,A_n\epsilon a$，其最粗分割为 $A_1',\cdots,A_m'$。设 $B\epsilon\mathscr{B}(\bar{R}_+^n)$，则

$$\begin{aligned} P'_{A_1,\cdots,A_n}(B) &= P'\{(\nu(A_1),\cdots,\nu(A_n))\epsilon B\} \\ &= P'\{(\sum_{A_j'\subset A_1}\nu(A_j'),\cdots,\sum_{A_j'\subset A_n}\nu(A_j'))\epsilon B\} \\ &= P'\{(\nu(A_1'),\cdots,\nu(A_m'))\epsilon g^{-1}(B)\} \\ &= P'_{A_1',\cdots,A_m'}(g^{-1}(B)) = P^{A_1',\cdots,A_m'}(g^{-1}(B)) \end{aligned}$$

上面 g 由(7)式定义，故 $P'_{A_1,\cdots,A_n}=P^{A_1',\cdots,A_m'}\circ g^{-1}$，因而 $P'_{A_1,\cdots,A_n}=P^{A_1,\cdots,A_n}$。于是，由定理 1 的唯一性可知，$P'=P$。

参 考 文 献

〔1〕 Jagers P, *Aspects of Random Measures and Point Processes, In Advances in Probability and Related Topics* 3, Marcel Decker, New York, 1974, 179～239

〔2〕 Kallenberg O, *Random Measures*, Academic Press, London, 1975

Another Form of the Existence and Uniqueness Theorem of Random Measures

*Wu Xianwei**

Abstract

The existence and uniqueness theorem of random measures in a form different form that in Jagers (1974) is obtained. It is convenient for use in some cases.

Keywords random measures, existence theorem

* Department of Mathematics