

Calogero 完全可积系统的解析解及其特性*

谢志云

(计算机科学系)

摘 要

给出了半对称Calogero完全可积系统的解析解的显式表达式,分析其解的有界性质,证明了相应的相空间不存在闭轨,并对其相流的特点进行了讨论。

关键词 半对称Calogero系统,可积系统,解析解,闭轨,相流

1 半对称Calogero系统

Calogero 系统是完全可以积系统的典型例子之一,为研究完全可以积系统提供了一个分析工具。关于Calogero系统的可积性已有许多讨论^[1,2]。原则上说完全可以积系统是可以积分的方法求得解的。但是,在多数情况下,要找出其解析解的显式表达式似乎是困难的。本文给出了半对称Calogero系统的定义,得到其解的显式表达式。由此分析了其解的有界性,证明其相空间不存在闭轨。本文结果的应用是多方面的,如对可积系统数值方法的检验。通过数值方法对半对称Calogero系统的应用,比较数值解与解析解,来判定该数值方法的有效性。

本文研究两个质点的 Calogero 系统。

定义 1 称下列方程组所描述的系统为半对称 Calogero 系统

$$\dot{p}_1(t) = \frac{2}{(q_1(t)-q_2(t))^3}, \quad \dot{p}_2(t) = -\frac{2}{(q_1(t)-q_2(t))^3} \quad (1)$$

$$\dot{q}_1(t) = p_1(t), \quad \dot{q}_2(t) = p_2(t) \quad (2)$$

$$p_1(0) = \beta, \quad p_2(0) = -\beta, \quad q_1(0) = \alpha_1, \quad q_2(0) = \alpha_2 \quad (3)$$

其中 $\dot{p}_1(t) \triangleq \frac{d}{dt} p_1(t)$, 余类推。 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。 $Z = (p_1(t), p_2(t), q_1(t), q_2(t))^T \in \mathbf{R}^4$ 称为相变量。

定义 2 称 $\alpha_1 = -\alpha_2$ 的半对称 Calogero 系统为对称 Calogero 系统。

在定义 2 中,之所以分别冠以半对称和对称,是因为在下面的讨论中将看到,在半对称系统的相平面中,解曲线关于 p_1, p_2 , 是对称的;而在对称系统的相平面中,解曲线关于 p_1, p_2 , 及 q_1, q_2 都是对称的。

Calogero系统是完全可以积的^[1]。它的两个对合的首次积分分别为

$$F_1(Z) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{(q_1 - q_2)^2} \quad (4)$$

本文1988年6月29日收到

$$F_2(Z) = p_1 + p_2 \quad (5)$$

2 解的表达式

引理 方程(其中 $a > 0$)

$$\begin{cases} (\dot{\varphi}(t))^2 - a\varphi(t) + 1 = 0, & t \geq 0 \\ \dot{\varphi}(0) \text{ 已知且非零} \end{cases} \quad (6)$$

$$\dot{\varphi}(0) \text{ 已知且非零} \quad (7)$$

有唯一解属于 $C^2[0, +\infty)$, 且可显式地表为

$$\varphi(t) = \frac{a}{4}t^2 + \dot{\varphi}(0)t + \frac{(\dot{\varphi}(0))^2 + 1}{a} \quad (8)$$

证明 利用(6)可得

$$\varphi(0) = [(\dot{\varphi}(0))^2 + 1]/a \quad (9)$$

再对(6)两边同时微分得

$$\dot{\varphi}(t) \left(\dot{\varphi}(t) - \frac{a}{2} \right) = 0 \quad (10)$$

由于 $\dot{\varphi}(0) \neq 0$. 因此可分两种情况进行讨论.

(i) $\forall t \in [0, +\infty)$, $\ddot{\varphi}(t) \neq 0$. 此时由(10)式知, $\forall t \in [0, +\infty)$ 有

$$\ddot{\varphi}(t) - \frac{a}{2} = 0 \quad (11)$$

由(11)并注意(9)式, 即得(8)式, 证毕

(ii) $\exists t_1 \in (0, +\infty)$ 使得 $\dot{\varphi}(t_1) = 0$, 但 $\dot{\varphi}(t) \neq 0, \forall t \in [0, t_1)$. 此时在区间 $t \in [0, t_1)$, 由(10)式可得:

$$\varphi(t) = \frac{a}{4}t^2 + \dot{\varphi}(0)t + \frac{(\dot{\varphi}(0))^2 + 1}{a}, \quad \forall t \in [0, t_1) \quad (12)$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{a}{2}t + \dot{\varphi}(0), \quad \forall t \in [0, t_1) \quad (13)$$

由于 $\dot{\varphi}(t_1) = 0$, 根据连续函数的性质, 由(13)式可求得

$$t_1 = -\frac{2}{a}\dot{\varphi}(0) \quad (14)$$

下面证明, $\forall t \in (t_1, +\infty)$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, 不然, 若有 $\bar{t}_2 \in [t_1, +\infty)$, 使 $\dot{\varphi}(\bar{t}_2) = 0$. 则将推出: $\forall t \in [t_1, \bar{t}_2]$ 有 $\dot{\varphi}(t) = 0$. 事实上, 若有 $\bar{t} \in [t_1, \bar{t}_2]$ 使 $\dot{\varphi}(\bar{t}) \neq 0$. 则由连续函数的性质, $\exists t^*, t^{**} \in [t_1, \bar{t}_2]$, $t^* \neq t^{**}$, 使 $\bar{t} \in (t^*, t^{**})$, $\dot{\varphi}(t^*) = \dot{\varphi}(t^{**}) = 0$, 且 $\dot{\varphi}(t) \neq 0, \forall t \in (t^*, t^{**})$. 于是由(10)式知,

$$\varphi(t) = \frac{a}{4}t^2 + \dot{\varphi}(0)t + \frac{(\dot{\varphi}(0))^2 + 1}{a}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{a}{2}t + \dot{\varphi}(0), \quad \forall t \in (t^*, t^{**})$$

但这与 $\dot{\varphi}(t^*) = \dot{\varphi}(t^{**}) = 0$ 矛盾. 故 $\forall t \in [t_1, \bar{t}_2]$, 有 $\dot{\varphi}(t) = 0$. 从而 $\ddot{\varphi}(t_1 + 0) = 0$. 然而, 由(12)式可得 $\ddot{\varphi}(t_1 - 0) = \frac{a}{2} \neq 0$. 由于 $\varphi(t) \in C^2[0, +\infty)$, 因此出现矛盾, 这表明 $\forall t \in (t_1, +\infty)$, $\dot{\varphi}(t) \neq 0$, 于是由(10)式知,

$$\varphi(t) = \frac{a}{4}t^2 + \dot{\varphi}(0)t + \frac{(\dot{\varphi}(0))^2 + 1}{a}, \quad \forall t \in (t_1, +\infty) \quad (15)$$

利用(14)式, 直接验证可知式(15)对 $t = t_1$ 亦成立. 故结合(12)、(15)式, 引理即得证.

定理 1 对称 Calogero 系统的解可唯一地表为

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \text{sign}(\alpha_1) \dot{\varphi}(t) / (2\sqrt{\varphi(t)}) \\ p_2(t) &= \text{sign}(\alpha_2) \dot{\varphi}(t) / (2\sqrt{\varphi(t)}) \\ q_1(t) &= \text{sign}(\alpha_1) \sqrt{\varphi(t)} \\ q_2(t) &= \text{sign}(\alpha_2) \sqrt{\varphi(t)} \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(t) = \left(\beta^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2}\right)t^2 + 2\alpha_1\beta t + \alpha_1^2$$

证明 由首次积分 $F_2(Z) = p_1 + p_2$ 的守恒性知, $\forall t \in [0, +\infty)$,

$$p_1(t) + p_2(t) = p_1(0) + p_2(0) = 0$$

从而

$$\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t) = p_1(t) + p_2(t) = 0$$

$$q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) + q_2(0) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \quad (16)$$

又由能量守恒性知, $\forall t \in [0, +\infty)$ 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(p_1^2(t) + p_2^2(t)) + \frac{1}{(q_1(t) - q_2(t))^2} \\ &= \frac{1}{2}(p_1^2(0) + p_2^2(0)) + \frac{1}{(q_1(0) - q_2(0))^2} = \beta^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2} \end{aligned}$$

于是由(16)、(2)及上式得

$$(\dot{q}_1(t))^2 + \frac{1}{4q_1^2(t)} = \beta^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2}$$

置 $\varphi(t) = q^2(t)$, 则有

$$(\dot{\varphi}(t))^2 - \left(\beta^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2}\right)\varphi(t) + 1 = 0$$

且 $\dot{\varphi}(0) = 2q_1(0)\dot{q}(0) = 2\alpha_1\beta$

应用引理即知 $\varphi(t)$ 可唯一地表为

$$\varphi(t) = \left(\beta^2 + \frac{1}{4\alpha_1^2}\right)t^2 + 2\alpha_1\beta t + \alpha_1^2$$

另一方面, 由能量守恒性及(16)式易知 $q_1(t)$ 保号. 故

$$q_1(t) = \text{sign}(\alpha_1) \sqrt{\varphi(t)}$$

最后由(16)、(2)即给出定理的证明. 证毕

定理 2 半对称 Calogero 系统的解可唯一地表为

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \text{sign}(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\varphi}(t) / (2\sqrt{\varphi(t)}), \\ p_2(t) &= -\text{sign}(\alpha_1 - \alpha_2) \dot{\varphi}(t) / (2\sqrt{\varphi(t)}) \end{aligned}$$

$$q_1(t) = \text{sign}(\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{\varphi(t)} + (\alpha_1 + \alpha_2)/2$$

$$q_2(t) = -\text{sign}(\alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{\varphi(t)} + (\alpha_1 + \alpha_2)/2$$

其中
$$\varphi(t) = (\beta^2 + \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2})t^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\beta t + (\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2})^2$$

证明 作变换: $Z = (p_1, p_2, q_1, q_2) \rightarrow \tilde{Z} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2)$. 其中 $\tilde{p}_1 = p_1, \tilde{p}_2 = p_2, \tilde{q}_1 = q_1 - (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \tilde{q}_2 = q_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)/2$. 显然, \tilde{Z} 是半对称 Calogero 系统(1)-(3)的解当且仅当 \tilde{Z} 是满足初值

$\tilde{p}_1(0) = \beta, \tilde{p}_2(0) = -\beta, \tilde{q}_1(0) = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \tilde{q}_2(0) = -(\alpha_1 + \alpha_2)/2$ 的对称 Calogero 系统的解. 因此由定理 1 及上述变换即给出定理的证明. 证毕

由定理 1、2 可知, 半对称系统的动量 p_1, p_2 是对称的. 而对称系统的位移 q_1, q_2 和动量 p_1, p_2 分别都是对称的.

3 解的特性

由上一节的结果, 很容易导出

推论 1 对于半对称 Calogero 系统的解 $Z = (p_1, p_2, q_1, q_2)^T$, p_1, p_2 有界, 即, $\forall t \in [0, +\infty)$,

$$|p_1(t)|, |p_2(t)| \leq [2\beta^2 + \frac{2}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}]^{1/2} \quad (17)$$

而当 $\beta \cdot (\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ 时, $q_1(t), q_2(t)$ 严格单调; 当 $\beta(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0$ 时, 两质点最靠近的时刻为

$$t_c = -\beta(\alpha_1 - \alpha_2) / [2\beta^2 + 2/(\alpha_1 - \alpha_2)^2] \quad (18)$$

证明 由能量守恒性即可得证(17). 利用定理 2 可知, 当 $\beta(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ 时 $\varphi(t)$ 为单调函数, 从而 $q_1(t), q_2(t)$ 亦单调. 而当 $\beta(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0$ 时, 由 $\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t) = 0$ 及定理 2 即可求得(18式), 此时两质点最靠近. 证毕

推论 2 半对称 Calogero 系统不存在闭轨.

证明 由推论 1. 当 $\beta(\alpha_1 - \alpha_2) > 0$ 时, $q_1(t), q_2(t)$ 严格单调. 显然此时不存在闭轨; 而当 $\beta(\alpha_1 - \alpha_2) \leq 0$ 时, 由定理 2 易知, 当 $t > t_c$ 后, $q_1(t), q_2(t)$ 严格单调. 故此时同样不存在闭轨, 而只有自相交轨迹. 证毕

推论 3 半对称 Calogero 系统的相流对于初始点满足 $H(z(0)) = H(\tilde{z}(0))$ 或 $(q_1(0) - q_2(0))(\tilde{q}_1(0) - \tilde{q}_2(0)) < 0$ 的两条轨迹, 经长时间后, 沿 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ 方向压缩, 而沿 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ 方向延展.

证明 任意时刻两质点 $(\mathbf{p}, \mathbf{q}), (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{q}})$ 在 \mathbf{q} 方向的距离为

$$D(t) = (q_1(t) - \tilde{q}_1(t))^2 + (q_2(t) - \tilde{q}_2(t))^2$$

由定理 2, 将 $q_1, q_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$ 的表达式代入上式, 经简单的运算后有

$$\begin{aligned} \frac{dD(t)}{dt} &= 2[\dot{\varphi}(t) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \text{sign}((\alpha_1 - \alpha_2)(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)) \\ &\quad \times (\varphi(t)\tilde{\varphi}(t))' / \sqrt{\varphi(t)\tilde{\varphi}(t)}] \end{aligned}$$

其中
$$\varphi(t) = (\beta^2 + 1/(\alpha_1 - \alpha_2)^2)t^2 + (\alpha_1 - \alpha_2)\beta t + \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2)^2$$

$$\tilde{\varphi}(t) = (\tilde{\beta}^2 + 1/(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)^2)t^2 + (\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)\tilde{\beta}t + \frac{1}{4}(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)^2$$

由此易知, $dD(t)/dt$ 关于 t 的主项系数为

$$4[H(z(0)) - \text{sign}((\alpha_1 - \alpha_2)(\tilde{\alpha}_1 - \alpha_2))H(\tilde{z}(0))]^2$$

由推论中的假设条件知, 上式恒正. 于是, 长时间后, $\frac{dD(t)}{dt} > 0$, 即相流沿 q 方向 延展 (图 1 描述了半对称 Calogero 系统的相流长时间后的特性). 同样地, 可以证明相流沿 P 方向压缩. 证毕.

注记 从本文的结果可以看到, 半对称 Calogero 系统具有许多独特性质. 如何定性地讨论一般的 Calogero 系统, 有待进一步的研究.

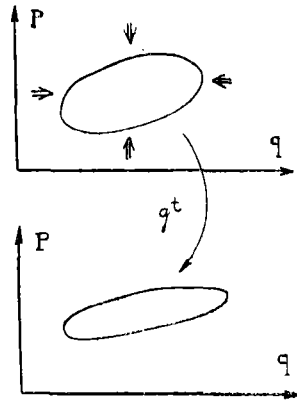


图 1 g^t 表示相流
Fig. 1 The character of phase flow g^t

参 考 文 献

- [1] Marsden J E, *Lectures on Geometric Methods in Mathematical physics*, SIAM, Philadelphia, 1981, 39
- [2] Moser J, *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, CIME lectures, Bressanone, Published in *Dynamical Systems*, Birkhauser, Boston, 1980

The Analytic Solution and Its Characters of the Calogero Completely Integralable System

Xie Zhiyun*

Abstract

The semi-symmetric Calogero system is defined and studied. The analytic solution of the system is obtained. It is shown that there is not any closed orbit in the phase plane of semi-symmetric Calogero system. Also, the behaviour of phase flow of the system is examined.

Keywords semi-symmetric Calogero system, integralable system, analytic solution, closed orbits, phase flow

* Department of Computer Science