

轴对称弹性薄壳自振频率与 模态的计算*

(75) 48 1990.04.01

赵 健

汪鸿振 朱物华

赵健(中山大学应用力学与工程系) (上海交通大学振动、冲击与噪声研究所)

摘 要

在传统的传递矩阵法的基础上,用分部积分化薄壳轴对称振动常微分方程为积分方程组;采用线性插值技术得到相邻节点间变量的传递矩阵;进一步确定各分节区段上的传递矩阵,用矩阵的高斯消去法将边界条件从壳体的一端转化到另一端,从而求解。本文还提出了壳体带封闭端情形的直接处理方法。

关键词 弹性薄壳, 振动, 传递矩阵法

1 引 言

Kalnins^[1~2]提出将长的轴对称弹性薄壳分成若干节,即采用多节传递矩阵法求解振动常微分方程组边值问题的解。该方法精度高,所需计算机存贮量小,但缺点是不能直接处理壳体封闭端的奇异性问题。文献[3]提出将封闭端等效成一小开角球壳,再用渐近展开法确定传递矩阵,但这一过程显得较繁琐和不便。

本文在多节传递矩阵法的基础上进行改进,用数值积分法建立相邻两节点间的传递矩阵,因而可以灵活地用矩阵乘法得到由若干个节点组成的区段两端点之间的传递矩阵;对封闭端情形,把出现在方程式中的奇异性因子乘往另一边去,有效地解决奇异性问题。

2 基本公式

讨论轴对称型自由振动问题,所谓奇异性因子,就是指截面圆半径的幂次方在封闭端附近是趋于零的形式。在把这些奇异因子乘往方程左端后,得到如下的一组6个一阶常微分方程式:

$$\mathbf{A}(s) \frac{d\mathbf{Y}}{ds} = \mathbf{B}(s)\mathbf{Y} + \mathbf{C}(s) \quad (1)$$

式中 s 为母线长度坐标; $\mathbf{A}(s), \mathbf{B}(s)$ 为 6×6 个元素的方阵; $\mathbf{Y}, \mathbf{C}(s)$ 为 6 个元素

1989年3月22日收到

• 国家自然科学基金资助项目

的列阵。

$$\mathbf{Y} = (W \ u_{\phi} \ \beta_{\phi} \ Q_{\phi}/K \ N_{\phi}/K \ M_{\phi}/D)^T \quad (2)$$

上式中, W 为法向位移; u_{ϕ} 为母线方向位移; β_{ϕ} 为法向转角; Q_{ϕ} 为剪力; N_{ϕ} 为母线方向正应力; M_{ϕ} 为弯矩; $K = Eh/(1 - \nu^2)$; $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$; h 为壳体厚度, ν 为泊松比; E 为材料的弹性模量。

(1) 式中 $\mathbf{A}(s)$ 是由消除奇异因子的过程所形成的一个对角形矩阵, 这是与文献[1,2] 的主要区别之一。其非零元素为:

$$A_{11} = 1; \ A_{22} = r; \ A_{33} = r; \ A_{44} = r; \ A_{55} = r^2; \ A_{66} = r^2$$

$\mathbf{B}(s)$ 矩阵中的非零元素为:

$$B_{12} = 1/R_{\phi}; \ B_{13} = -1; \ B_{21} = -(\nu \sin \phi + r/R_{\phi}); \ B_{22} = -\nu \cos \phi; \ B_{25} = r;$$

$$B_{33} = -\nu \cos \phi; \ B_{36} = r; \ B_{41} = \left[(1 - \nu^2)/R_{\theta}^2 - \Omega^2(1 - \nu^2)/L^2 \right] r;$$

$$B_{42} = (1 - \nu^2) \cos \phi / R_{\theta}; \ B_{44} = -\cos \phi; \ B_{45} = \nu \sin \phi + r/R_{\phi}; \ B_{51} = (1 - \nu^2) \sin \phi \cos \phi;$$

$$B_{52} = (1 - \nu^2) \cos^2 \phi - r^2 \Omega^2 (1 - \nu^2) / L^2; \ B_{54} = -r^2 / R_{\phi}; \ B_{55} = -r^2 (1 - \nu^2) \cos \phi;$$

$$B_{63} = (1 - \nu^2) \cos^2 \phi; \ B_{64} = r^2 K / D; \ B_{66} = -r(1 - \nu) \cos \phi.$$

R_{ϕ} , R_{θ} 分别为母线方向、周向的曲率圆半径; L 为特征长度; $\Omega = \omega L \sqrt{E/\rho}$, ω 为角频率, ρ 为材料密度。

$\mathbf{C}(s)$ 中的非零元素为:

$$C_4 = -rp/K; \ C_5 = -r^2 p_{\phi}/K; \ C_6 = -r^2 m_{\phi}/D$$

p 为法向外力; p_{ϕ} 为周向外力; m_{ϕ} 为外力矩。

由上各式可见, 各矩阵元素在壳体封闭端 ($r \rightarrow 0$) 处不再出现奇异性, 从而(1)式可用于直接计算封闭端的传递矩阵。

如果在壳体母线方向取 N 个节点, 在每两个节点间的单元区域上, 对壳体变量采用线性插值, 并对(1)式作分部积分处理后得到:

$$(\mathbf{A}(s_2) - \mathbf{G}_2) \mathbf{Y}_2 = (\mathbf{A}(s_1) + \mathbf{G}_1) \mathbf{Y}_1 + \mathbf{G}_c \quad (3)$$

$$\mathbf{G}_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d\mathbf{A}(s)}{ds} + \mathbf{B}(s) \right) \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1} ds, \quad \mathbf{G}_2 = \int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{d\mathbf{A}(s)}{ds} + \mathbf{B}(s) \right) \frac{s - s_1}{s_2 - s_1} ds$$

$$\mathbf{G}_c = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{C}(s) ds.$$

称从 $s_1 \rightarrow s_2$ 间的传递为顺向传递, 即:

$$\mathbf{Y}_2 = (\mathbf{A}(s_2) - \mathbf{G}_2)^{-1} (\mathbf{A}(s_1) + \mathbf{G}_1) \mathbf{Y}_1 + (\mathbf{A}(s_2) - \mathbf{G}_2)^{-1} \mathbf{G}_c \quad (4)$$

从 $s_2 \rightarrow s_1$ 为逆向传递, 即

$$\mathbf{Y}_1 = (\mathbf{A}(s_1) + \mathbf{G}_1)^{-1} (\mathbf{A}(s_2) - \mathbf{G}_2) \mathbf{Y}_2 - (\mathbf{A}(s_1) + \mathbf{G}_1)^{-1} \mathbf{G}_c \quad (5)$$

交替使用上述两种传递方式, 较为灵活方便。如对封闭端, 总是从该端向壳体中部方向传递, 因而避免了求逆阵可能出现的困难。每一划分的区段上的传递矩阵可用(4)或(5)式累积相乘得到。最后则用文献[2]的方法求解自振频率与模态。

3 计算实例

在 HP-1000 计算机上, 编制了 FORTRAN 语言计算程序, 对圆板及球壳轴对称振

动特性作了实例计算。所得结果与理论解相比较,符合得甚好。

3.1 周向固定的圆板

圆板是轴对称薄壳的一种退化情况,即两个主曲率均为零, $1/R_\phi = 1/R_\theta \rightarrow 0$ 。边界条件为:封闭端(圆心), $u_\phi = \beta_\phi = Q_\phi = 0$;固定端, $W = u_\phi = \beta_\phi = 0$ 。计算结果见表1。

表1 周向固定圆板 λ^2 值 ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho / (Eh^2)} 12(1-\nu^2)$, $\nu = 0.3$) 与节圆半径 (r/a)

Tab. 1 The value of λ^2 and the nodal circle radius (r/a) of circular Plates with fixed edge

阶次	λ^2 值		节圆半径 r/a	
	理论解 ^[4]	本文结果	理论解 ^[4]	本文结果
0	10.2158	10.2166		
1	39.771	39.79	1,0.379	1,0.379
2	89.104	89.20	1,0.583,0.255	1,0.583,0.255
3	158.183	158.54	1,0.688,0.439,0.191	1,0.687,0.439,0.191

3.2 部分球壳

部分球壳,锥角为 60° ,一端为封闭($u_\phi = \beta_\phi = Q_\phi = 0$),另一端为滚铰($W = N_\phi = M_\phi = 0$)。取 $R/h = 20, \nu = 0.3$ 。表2给出了其轴对称振动的前6个自振频率,与文献[5]的理论值作比较,最大相对误差小于0.3%。

表2 部分球壳(一端封闭,另一端为滚铰)轴对称振动的自振频率 Ω ($\Omega = \omega R / \sqrt{E/\rho}, R/h = 20, \nu = 0.3$)

Tab. 2 The natural frequencies Ω of Symmetric vibration of partial Spherical Shell (one closed end, the other end is roller-hinged)

振动类型	弯曲振动				膜振动	
文献 ^[5]	0.9954	1.381	2.11	3.183	2.546	5.53
本文结果	0.9949	1.3804	2.1133	3.1923	2.5461	5.5307

表2中,对弯曲振动与膜振动作了区分,见图1。图1a给出 $\Omega = 3.1923$ 的弯曲模态,图1b给出 $\Omega = 2.5461$ 的膜振动模态。其余各阶模态图在此从略。

图1(b)中, $\Omega = 2.5461$ 的模态图形与文献[5]中不同, Ross^[6]指出,由于弯曲项的影响在纯的膜类振动模态的基础上再迭加了一个沿母线方向变化频率较高些的振荡,这一点在图中体现出来了,并与文献[6]的结果一致。

3.3 整球壳

整球壳的两端皆为封闭,且已有理论解,用文献[5]的方法,得到各阶自振频率值(见表3)。

表 3 整球壳的前 10 阶弯曲振动与膜振动自振频率 Ω
($R/h=20, \nu=0.3, \Omega=\omega R/\sqrt{E/\rho}$)

Tab. 3 Natural frequencies $\Omega(R/h=20, \nu=0.3, \Omega=\omega R/\sqrt{E/\rho})$
of bending and membrane vibration of whole spherical shell

阶 次		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
弯 曲 型	理论解	0.7366	0.8816	0.9600	1.0360	1.1337	1.2652	1.4361	1.6483	1.9013	2.1936
	本文结果	0.7366	0.8816	0.9606	1.0364	1.1349	1.2680	1.4417	1.6581	1.9172	2.2179
	相对误差(%)	0	0	0.063	0.039	0.11	0.22	0.39	0.59	0.84	1.11
膜 型	理论解	1.6903	2.0704	2.8543	3.8120	4.8205	5.8472	6.8821	7.9213	8.9631	10.0066
	本文结果	1.6903	2.0704	2.8547	3.8134	4.8241	5.8545	6.8948	7.9417	8.9937	10.0503
	相对误差(%)	0	0	0.014	0.037	0.075	0.125	0.185	0.258	0.34	0.44

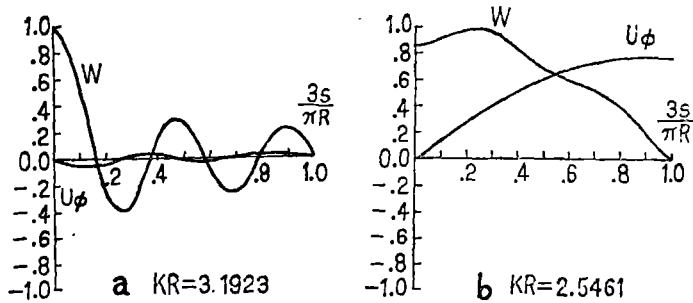


图 1 部分球壳弯曲振动($\Omega=3.1923$)与膜振动($\Omega=2.5461$)模态
Fig. 1 Examples of bending vibration ($\Omega=3.1923$) and membrane vibration ($\Omega=2.5461$) mode shapes

作为示例，振动模态图形见图 2。图 2 a 中 $\Omega=1.1349$ (第五阶弯曲模态)、图 2 b 中 $\Omega=4.8241$ (第五阶膜模态)。由 (a)、(b) 可见，前者以法向位移 W 为主，后者则以母线方向位移 u_ϕ 为主。

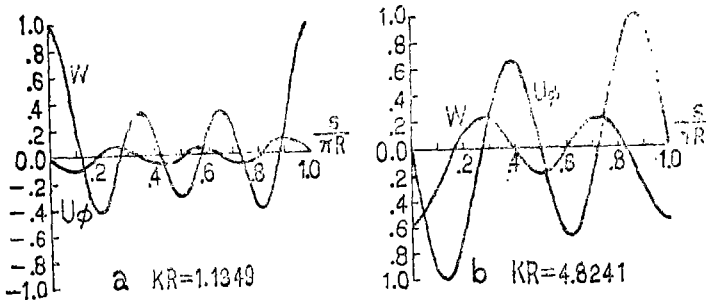


图 2 整球壳的弯曲振动($\Omega=1.1349$)与膜振动($\Omega=4.8241$)模态图
Fig. 2 Examples of bending vibration ($\Omega=1.1349$) and membrane vibration ($\Omega=4.8241$) mode shapes of whole spherical shells

4 结 论

本文方法可对任意形状轴对称弹性薄壳振动特性进行计算,具有适用性强、使用方便和能自动处理封闭端问题等优点。本方法亦可用于求解轴对称薄壳非对称情形下的模态及其相应的自振频率,还可用于解一般的常微分方程组边值问题。

参 考 文 献

- [1] Kalnins A, *J. Appl. Mech.*, 1964, 467~476
- [2] Kalnins A, *J. Acou. Soc. Am.*, 36 (1964), 7, 1355~1365
- [3] Discussion of "Analysis of Shells of Revolution Subjected to Symmetrical and Nonsymmetrical Loads," *J. Appl. Mech.*, 1965, 467~469
- [4] Leissa A W, *Vibration of Plates*, NASA SP-160, Chapter 2, Circular Plates, 1969
- [5] Kalnins A, *J. Acou. Soc. Am.*, 36 (1964) 1, 74~81
- [6] Ross E W, *J. Appl. Mech.*, 1965, 553~561
- [7] Jian Zhao, *The Coupled Vibration and Acoustic Radiation from Thin, Elastic Axisymmetric Shells Submerged in Water*, Ph. D. thesis, Shanghai Jiao Tong University, March, 1988

Calculation of Natural Frequencies and Modes of Thin Elastic Axisymmetric Shells

Zhao Jian* Wang Hongzhen Zhu Wuhua

Abstract

Based on the traditional transfer matrix method, the ordinary differential equations of symmetric vibration are converted to integral equations. The transfer matrix between two nodes is obtained by employing linear interpolating technique. Furthermore, the transfer matrix of each segment is determined, and the boundary conditions are conveyed from one end to the other by Gauss matrix elimination. It is suggested that the problem of closed shell can be dealt with by multiplying infinitesimals of appropriate order to eliminate singular factors in the equations.

Keywords thin elastic shell, vibration, transfer matrix method

* Department of Applied Mechanics and Engineering, Zhongshan University