

· 研究简报 ·

一类非线性微分方程极限环的存在唯一性

王高雄

(数学系)

摘要

得到方程(E)的极限环存在和唯一的充分条件. 与已有的一些结果比较, 省略了条件 $|h(\pm\infty)| = +\infty$; 同时, 也不要求条件 $G(\pm\infty) = +\infty$ 一定满足.

关键词 极限环, 环域原理

考虑方程

$$\begin{cases} \dot{x} = h(y) - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(\zeta) d\zeta \quad (E)$$

假设方程右端函数连续且能保证初值问题解的唯一性. 记 $G(x) = \int_0^x g(\zeta) d\zeta$.

定理 1 设方程(E)中函数 $h(y)$, $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件

- 1° $yh(y) > 0 (y \neq 0)$, $xg(x) > 0 (x \neq 0)$
- 2° $xF(x) \leq 0$ 但 $F(x) \not\equiv 0$, 当 $0 < |x| \ll 1$
- 3° 存在常数 $M > 0$ 及 $k > k^1$ 使得

$$F(x) \geq k \text{ 当 } x > M; F(x) \leq k^1 \text{ 当 } x < -M$$

- 4° 存在正数 α 和 $\tilde{N} > N$ 使得

$$h(y) - F(x) \geq \alpha \text{ 当 } |x| \leq M, y \geq N; h(y) - F(x) \leq -\alpha \text{ 当 } |x| \leq M, y \leq -N,$$

且当 $k^1 > 0$ 时对所有 $y \geq \tilde{N}$, 不等式 $h(y) \geq k$ 成立, 当 $k < 0$ 时不等式 $h(y) \leq k^1$ 对所有 $y \leq -\tilde{N}$ 成立.

- 5° $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [G(x) + F(x) \operatorname{sgn} x] = +\infty$

则方程(E)必存在极限环.

定理证明要点 应用 Poincaré-Bendixson 环域原理证实定理的论断. 因此, 关键在于构造满足所要求的环域. 注意到方程的唯一奇点 $(0, 0)$ 的不稳定性, 因而主要工作就在于构造环域的外境界线. 本文首先利用控制曲线讨论方程轨线的走向. 证明在定理条件下, 从正 y 轴上某点 $p_0(0, y_0) (y_0 > N)$ 出发的正半轨线 L^+ 必环绕奇点一周返回正 y 轴上的点 $p_{10}(0, y_{10})$ (见图 1). 其次通过估计函数 $\lambda(x, y)$ 沿轨线 L^+ 的改变量, 证明当 $y_0 > N$ 足够大时, 点 p_{10} 必位于 p_0 的下方, 从而由轨线弧 $\widehat{p_0 p_{10}}$ 和线段 $\overline{p_0 p_{10}}$ 构成所需环域的

外境界线, 在证明过程中, 我们假设 $k^1 \leq 0$ 显然不影响问题的实质,

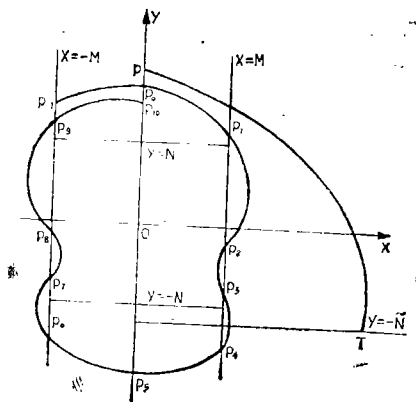


图 1

不难见到, 定理中条件 5° 也可改为

$$G(\pm\infty) = +\infty \text{ 或 } \overline{\lim}_{|x| \rightarrow +\infty} F(x) \operatorname{sgn} x = +\infty$$

又当 $|h(\pm\infty)| = +\infty$ 时定理条件 4° 必然满足.

因此可得

推论^[1] 若方程 (E) 中诸函数除满足定理 1 中条件 1°~3° 外, 尚有 $G(\pm\infty) = +\infty$ 与 $|h(\pm\infty)| = +\infty$ 同时成立, 则方程 (E) 必存在极限环.

此外, 也不难发现, 当条件 3° 中常数 k 和 k^1 满足关系 $k > 0 \geq k^1$ 或 $k \geq 0 > k^1$ 时, 条件 4° 的后半部分可以省略. 即有以下

定理 2 若方程 (E) 中诸函数除满足定理 1 中条件 1°, 2° 和 5° 外, 尚有

(i) 存在常数 $M > 0$, $k \geq 0 > k^1$ 或 $k > 0 \geq k^1$ 使得当 $x > M$ 时 $F(x) \geq k$; 当 $x < -M$ 时 $F(x) \leq k^1$;

(ii) 存在正数 N 及 α 使得

$$h(y) - F(x) \geq \alpha \quad \text{当 } |x| \leq M, y \geq N;$$

$$h(y) - F(x) \leq -\alpha \quad \text{当 } |x| \leq M, y \leq -N$$

则方程 (E) 必存在极限环.

由此容易推得文 [5] 的结果.

进一步假设函数 $h(y)$ 、 $g(x)$ 和 $f(x)$ 连续可微, 得到方程 (E) 存在唯一极限环的如下定理.

定理 3 若方程 (E) 中诸函数除满足定理 1 中条件 3°~5° 外, 同时满足下列条件:

(i) $h(y)$ 、 $f(x)$ 及 $g(x)$ 具有连续的一阶导数, 并且 $h'(y) \geq 0$ 而 $yh(y) > 0 (0 < |y| \ll 1)$, $xg(x) > 0 (x \neq 0)$

(ii) $f(x)/g(x) \cong$ 常数当 $0 < |x| \ll 1$, $f(0) \neq 0$; 又当 x 于 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上增加时, $f(x)/g(x)$ 不减, 则方程 (E) 存在唯一的稳定极限环.

定理结论可由定理 1 及文 [2] 推出.

例 方程(E)中诸函数具体取为

$$h(y) = 6(e^y - 1)/(e^y + 1), \quad g(x) = xe^{-x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2 - e^{x+1} & \text{当 } x < -1 \\ -x & \text{当 } |x| \leq 1 \\ (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} & \text{当 } x > 1 \end{cases}$$

易验定理 1 及定理 3 的条件均满足，因此可肯定方程存在唯一的稳定极限环。但在此，

$h(\pm\infty) \neq \infty$, $G(+\infty) \neq +\infty$ 及 $F(-\infty) \neq \infty$ ，因而采用文[1]与[3]~[8]提供的结果均不能判断极限环的存在性。

参 考 文 献

- [1] 吴葵光, 数学学报, 25(1982), 4, 456-463
- [2] Черкас Л А, Жилевич Л и, Д У, 6(1970), 7, 1170-1178
- [3] 黄克成, 数学学报, 23(1980), 4, 483-490
- [4] 周毓荣, 数学年刊, 3(1982), 1, 89-101
- [5] 井竹君, 应用数学学报, 5(1982), 1, 15-18
- [6] 高素志, 北京师范大学学报, 1983, 1, 11-17
- [7] 高素志、丁大正, 北京师范大学学报(1983), 4, 1-4
- [8] 史希福、黄启昌, 东北师范大学学报(自然科学版), (1982), 2, 1-5

On Existence and Uniqueness of Limit Cycle of a Class of Nonlinear Differential Equation

Wang Gaoxiong*

Abstract

We consider the system of differential equations (E), and obtain some theorems about the existence and uniqueness of limit cycle for the system (E) without the hypothesis $|h(\pm\infty)| = +\infty$; besides, the condition $G(\pm\infty) = +\infty$ may be not satisfied.

Keywords limit cycle, Annular region theorem

* Department of Mathematics