中山大学学报
1988年第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI No.4, 1988

矩形域上散乱数据的连续边界条件光顺逼近*

胡日章
（计算机科学系）

摘要

本文导出光顺逼近解的特征性质，证明解的存在唯一性和最优逼近性质，并给出数值例子.

关键词 光顺逼近，连续边界条件，散乱数据

矩形域上散乱数据拟合已为许多学者[1-4]讨论过. 文〔5〕提出的多元最优插值，其插值点可任意配置，具有更广泛的实用性. 由于实际问题中的数据总是有误差的，所以常常可以放松插值的要求，而在插值与平滑之间加以调配，这就是所谓光顺逼近. 提法如下：

设 $R=(a,\ b)\times(c,\ d)=\{(x,\ y):a<x<b,\ c<y<d\}$ 为平面矩形域，$H^{m,n}(R)=\{u(x,\ y)\,|\,u^{(m,n)}(x,\ y)\in L_2(R)\}$. 对于固定的 $\rho\geqslant 0$，求函数 $S(x,\ y)\in H^{m,n}(R)$，使下述泛函取极小

$$J_{m,n}(u)=\frac{1}{2}\iint_R(u^{(m,n)}(x,y))^2dxdy+\frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}(\lambda_i^{\alpha\beta}u-F_i^{\alpha\beta})^2 \tag{1}$$

其中 $u\in H^{m,n}(R)\cap B_F$.

$$B_F=\{u(x,\ y)\,|\,u^{(i,0)}(x,\ y)|_{x=\zeta}=F_{i\zeta}(y),\ c\leqslant y\leqslant d,\ i\in I_\zeta,\ \zeta=a,\ b,$$
$$u^{(0,j)}(x,\ y)|_{y=\eta}=F_{j\eta}(x),\ a\leqslant x\leqslant b,\ j\in J_\eta,\ \eta=c,\ d\}$$

$$I_a,\ I_b\subset I=\{0,\ 1,\ \cdots,\ m-1\};\quad J_c,\ J_d\subset J=\{0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\}$$

$$\lambda_i^{\alpha\beta}u\equiv u^{(\alpha,\beta)}(x_i,\ y_i),\qquad \alpha\in I_i\subset I,\ \beta\in J_i\subset J$$

本文1987年10月15日收到

* 中山大学高等学术研究中心基金会资助课题，在李岳生教授指导下完成

点$(x_i,\ y_i)\in R$可任意配置，$\{F_i^{\alpha\beta}\}$为任意实数集.边界值函数$F_{ia}(y)$，$F_{ib}(y)\in H^n(c,d)$，$F_{ic}(x)$，$F_{jd}(x)\in H^m(c,\ d)$，且满足角点协调条件。记$F=\{F_{ia},\ F_{ib},\ F_{ic},\ F_{jd}\}$ 并以B_0表示$F=0$的情形。

1　解的特征性质及结构

记P_1，P_2分别为将平面上的点映到x轴和y轴的垂直投影，并设

$$\mathring{\pi}=\{(x_i,\ y_i)\}_{i=1}^{\mathring{N}}$$

$$\mathring{\pi}_1=P_1\mathring{\pi}=\{\zeta_i\}_{i=1}^{N_1}\in(a,\ b),\ a=\zeta_0<\zeta_1<\cdots\cdots<\zeta_{N_1+1}=b$$

$$\mathring{\pi}_2=P_2\mathring{\pi}=\{\eta_i\}_{i=1}^{N_2}\in(c,\ d),\quad c=\eta_0<\eta_1<\cdots<\eta_{N_2+1}=d$$

$$\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2=\{(\zeta_i,\ \eta_j)\}_{i=1}^{N_1},\ {}_{j=1}^{N_2},\ \text{记}\ R_{ij}=(\zeta_i,\ \zeta_{i+1})\times(\eta_j,\ \eta_{j+1})$$

对于$f(x,\ y)$，定义

$$[f(\cdot,y)]_{\zeta_i}=\begin{cases}f(\zeta_i+0,\ y)-f(\zeta_i-0,\ y), & a<\zeta_i<b\\ f(a,\ y), & \zeta_i=a\\ -f(b,\ y), & \zeta_i=b\end{cases}$$

类似地定义$[f(x,\cdot)]_{\eta_j}$，而

$$[f(\cdot,\ \cdot)]_{\zeta_i,\ \eta_j}=[f[(\cdot,\ \cdot)]_{\zeta_i}]_{\eta_j}=[f(\zeta_i+0,\ \cdot)]_{\eta_j}-[f(\zeta_i-0,\ \cdot)]_{\eta_j}$$

定理 1（特征定理）　如果$S(x,\ y)\in H^{m,n}(R)\cap C^{2m,2n}(R\backslash\pi_1\times\pi_2)$是光顺问题(1)的解，则它必满足下列条件：

1)　$S^{(2m,2n)}(x,\ y)=0,\ (x,\ y)\in R_{ij},\ i=0,\ 1,\cdots,N_1,\ j=0,1,\cdots,N_2$

2)　$[S^{(2m-\mu-1,2n)}(\cdot,\ y)]_{\zeta_i}=0\qquad \eta_j<y<\eta_{j+1},\qquad \mu\in I$

$\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N_1,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ N_2$

3)　$[S^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\ \cdot)]_{\eta_j}=0,\qquad \zeta_i<x<\zeta_{i+1},\qquad \nu\in J$

$\qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ N_1,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N_2$

4)　$[S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\ \cdot)](\zeta_i,\ \eta_j)=0,\qquad \mu\in I,\qquad \nu\in J$

$\qquad (\zeta_i,\ \eta_j)\in\mathring{\pi}_1\times\mathring{\pi}_2\backslash\mathring{\pi}$

$\qquad [S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\ \cdot)](x_i,\ y_i)=0,\qquad \mu\in I\backslash I_i,\ \nu\in J\backslash J_i$

$\qquad i=1,\ 2,\cdots,\ \mathring{N}$

$$\lambda_i^{\mu\nu}S+(-1)^{m+n+\mu+\nu}\cdot\frac{1}{\rho}[S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\ \cdot)]_{x_iy_i}=F_i^{\mu\nu}$$

$\qquad \mu\in I_i,\qquad \nu\in J_i,\qquad i=1,\ \cdots,\mathring{N}$

5)　$S^{(2m-\mu-1,2n)}(\alpha,\ y)=0,\qquad \mu\in I\backslash I_\alpha,\qquad \alpha=a,\ b$

$\qquad \eta_j<y<\eta_{j+1}\quad j=0,\ 1,\ \cdots,\ N_2$

6)　$S^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\ \beta)=0\quad \nu\in J\backslash J_\beta\quad \beta=c,\ d$

$\zeta_i < x < \zeta_{i+1}, \quad i=0, 1, \cdots, N_1$

7) $[S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\alpha, \cdot)]_{\eta_j}=0, \quad \mu\in I\backslash I_\zeta \quad \nu\in J$

$j=1, 2, \cdots, N_2, \quad \alpha=a, b$

8) $[S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot, \beta)]_{\zeta_i}=0, \quad \mu\in I, \quad \nu\in J\backslash J_\beta$

$i=1, \cdots, N_1, \quad \beta=c, d$

9) $S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\alpha, \beta)=0, \quad \mu\in I\backslash I_\alpha, \quad \nu\in J\backslash J_\beta$

$(\alpha,\beta)\in V=\{(a,c),(b,c),(a,d),(b,d)\}$

证明 光顺问题(1)解$S(x, y)$存在的必要条件是第一变分为零，即

$$\delta J_{m,n}(S)=0$$

其中 $\delta S\in B_0\cap H^{m,n}(R)$

利用广义拉格明日恒等式[5]

$$\delta J_{m,n}(S)=\iint_R S^{(m,n)}\delta S^{(m,n)}dxdy+\rho\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}(\lambda_i^{\alpha\beta}S-F_i^{\alpha\beta})\lambda_i^{\alpha\beta}\delta S$$

$$=\sum_{i=0}^{N_1}\sum_{j=0}^{N_2}\iint_{R_{ij}}(-1)^{m+n}S^{(2m,2n)}(x, y)\delta S(x, y)dxdy$$

$$+\sum_{i=0}^{N_1+1}\sum_{j=0}^{N_2}\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}}\sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{m+n-\mu}[S^{(2m-\mu-1,2n)}(\cdot,y)]_{\zeta_i}\delta S^{(\mu,0)}(\zeta_i,y)dy$$

$$+\sum_{i=0}^{N_1}\sum_{j=0}^{N_2+1}\int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{m+n-\nu}[S^{(2m,2n-\nu-1)}(x,\cdot)]_{\eta_j}\delta S^{(0,\nu)}(x,\eta_j)dx$$

$$+\sum_{i=0}^{N_1+1}\sum_{j=0}^{N_2+1}\sum_{\mu=0}^{m-1}\sum_{\nu=0}^{n-1}(-1)^{m+n+\mu+\nu}[S^{(2m-\mu-1,2n-\nu-1)}(\cdot,\cdot)]_{\zeta_i\eta_j}\delta S^{(\mu,\nu)}(\zeta_i,\eta_j)$$

$$+\rho\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}(\lambda_i^{\alpha\beta}S-F_i^{\alpha\beta})\lambda_i^{\alpha\beta}\delta S$$

立得定理结论。

由特征条件1)—4)之第二式，$S(x, y)$具有下述形式

$$S(x, y)=\sum_{i=1}^{2m}g_i(y)\phi_i(x)+\sum_{i=1}^{2n}f_i(x)\phi_i(y)$$

$$+\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}C_i^{\alpha\beta}G_1^{(0,\alpha)}(x, x_i)G_2^{(0,\beta)}(y, y_i) \tag{2}$$

其中 $\{\phi_i(x)\}_1^{2n}$为$2m-1$次多项式空间$P_{2m}(x)$的基底；$\{\phi_i(y)\}_1^{2m}$为$2n-1$次多项式空间$P_{2n}(y)$的基底。

$$G_1(x, \zeta)=(x-\zeta)_+^{2m-1}/(2m-1)!, \quad G_2(y, \eta)=(y-\eta)_+^{2n-1}/(2n-1)!$$

$f_i(x)\in H^m(a, b)$，$g_i(y)\in H^n(c, d)$，$C_i^{\alpha\beta}$为任意常数。从而求(1)的解$S(x, y)$归结为使

i) $S(x,\ y)\in B_F$;

ii) $S(x,\ y)$满足特征条件4)之第三式及5)—9)。

2 解的存在唯一性及最优逼近性质

为了在形如(2)的函数中寻求满足i) ii)的$S(x,\ y)$，先考虑有关的两个单变量插值问题。

对于$f(x)$，$x\in[a,\ b]$和$g(y)$，$y\in[c,\ d]$，令泛函

$$\gamma_{i\zeta}f=\begin{cases}f^{(i)}(\zeta) & i\in I_\zeta\\ f^{(2m-i-1)}(\zeta) & i\in I\backslash I_\zeta\end{cases}\qquad \zeta=a,\ b$$

$$\gamma_{j\eta}g=\begin{cases}g^{(j)}(\eta) & j\in J_\eta\\ g^{(2n-j-1)}(\eta) & j\in J\backslash J_\eta\end{cases}\qquad \eta=c,\ d$$

设I_1，I_2分别为下述插值算子，满足

$$I_1f\in P_{2m}(x),\ \gamma_{ia}I_1f=\gamma_{ia}f,\ \gamma_{ib}I_1f=\gamma_{ib}f,\ i\in I$$

$$I_2g\in P_{2n}(y),\ \gamma_{jc}I_2g=\gamma_{jc}g,\ \gamma_{jd}I_2g=\gamma_{jd}g,\ j\in J$$

假定插值问题I_1和I_2有唯一解，$\phi_{ia}(x)$，$\phi_{ib}(x)\in P_{2m}(x)$，$i=1,\cdots,m$，$\phi_{jc}(y)$，$\phi_{jd}(y)\in P_{2n}(y)$，$j=1,\cdots,n$分别为它们的插值双正交基，即

$$I_1f(x)=\sum_{i\in I}(\gamma_{ia}f)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I}(\gamma_{ib}f)\phi_{ib}(x)$$

$$I_2g(y)=\sum_{j\in J}(\gamma_{jc}g)\phi_{jc}(y)+\sum_{j\in J}(\gamma_{jd}g)\phi_{jd}(y)$$

补充边界值函数

$$F_{i\zeta}(y)\equiv 0,\qquad i\in I\backslash I_\zeta,\ \zeta=a,\ b$$

$$F_{j\eta}(x)\equiv 0,\qquad j\in J\backslash J_\eta,\ \eta=c,\ d$$

并设协调条件

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{ia}F_{jc}(x)=\gamma_{jc}F_{ia}(y),\ \gamma_{ib}F_{jc}(x)=\gamma_{jc}F_{ib}(y)\\ \gamma_{ia}F_{jd}(x)=\gamma_{jd}F_{ia}(y),\ \gamma_{ib}F_{jd}(x)=\gamma_{jd}F_{ib}(y)\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

成立。记$R_i=E-I_i$，$(i=1,\ 2)$，E为恒等算子，则

$$\begin{aligned}S(x,\ y)=&\sum_{i\in I_a}F_{ia}(y)\phi_{ia}(x)+\sum_{i\in I_b}F_{ib}(y)\phi_{ib}(x)\\&+\sum_{j\in J_c}R_1F_{jc}(x)\phi_{jc}(y)+\sum_{j\in J_d}R_1F_{jd}(x)\phi_{jd}(y)\\&+\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}C_i^{\alpha\beta}\ R_1G_1^{(0,\alpha)}(x,\ x_i)R_2G_2^{(0,\beta)}(y,\ y_i)\end{aligned}\tag{4}$$

满足边界插值条件B_F及特征条件5)—9)。此点不难由布尔和插值验证。形如(4)的函数集记为S，它们仍具有(2)的形式，故剩下的问题是要满足特征条件4)之第三式。这将归结为解一个方程个数与未知数个数相同的线性方程组。

定理2 若插值问题I_1和I_2有唯一解，协调条件(3)成立，则光顺问题(1)在S中有唯一解。

证明 只须证明当边界插值函数与光顺数据 $F_i^{\alpha\beta}$ 全部为零时，光顺问题(1)在S中只有恒零解。设此时解为$S_0(x, y)$，往证$S_0(x, y)\equiv 0$。由广义拉格朗日恒等式，

$$\iint_R (S_0^{(m,n)}(x, y))^2 dxdy + \sum_{i=1}^{\mathring{N}} \sum_{\alpha\in I_i} \sum_{\beta\in J_i} (\lambda_i^{\alpha\beta} S)^2 = 0$$

由于
$$S_0(x, y) = \sum_{i=1}^{\mathring{N}} \sum_{\alpha\in I_i} \sum_{\beta\in J_i} C_i^{\alpha\beta} R_1 \frac{(x-x_i)_+^{2m-\alpha-1}}{(2m-\alpha-1)!} R_2 \frac{(y-y_i)_+^{2m-\beta-1}}{(2n-\beta-1)!} \tag{5}$$

所以 $S_0^{(m,n)}(x, y)$为分片二元$(m-1)\times(n-1)$次多项式，必有

$$S_0^{(m,n)}(x, y)\equiv 0, \qquad (x, y)\in R$$

即$S_0(x, y)$是$(m-1)\times(n-1)$次多项式，对比(5)的系数，注意到$(x-x_i)_+^{2m-\alpha-1}$，$(y-y_i)_+^{2n-\beta-1}$的次数分别不小于m和n，故必有一切$C_i^{\alpha\beta}=0$。证毕。

定理 3 定理 2 中的$S(x, y)$是光顺问题(1)的唯一解。对任$u(x, y)\in B_F\cap H^{m,n}(R)$

$$J_{m,n}(u) = J_{m,n}(S) + \mathring{J}_{m,n}(u-S) \tag{6}$$

$$J_{m,n}(S) \leqslant J_{m,n}(u) \tag{7}$$

其中
$$\mathring{J}_{m,n}(u) = \frac{1}{2}\iint_R (u^{(m,n)}(x, y))^2 dxdy + \frac{1}{2}\rho \sum_{i=1}^{\mathring{N}} \sum_{\alpha\in I_i} \sum_{\beta\in J_i} (\lambda_i^{\alpha\beta} u)^2$$

证明 由于

$$J_{m,n}(u) = J_{m,n}(u-S+S) = J_{m,n}(S) + \mathring{J}_{m,n}(u-S) + a(S, u-S)$$

其中
$$a(u, v) = \iint_R u^{(m,n)} v^{(m,n)} dxdy + \rho \sum_{i=1}^{\mathring{N}} \sum_{\alpha\in I_i} \sum_{\beta\in J_i} (\lambda_i^{\alpha\beta} u - F_i^{\alpha\beta})\lambda_i^{\alpha\beta} v$$

由于 $u-S\in B_0\cap H^{m,n}(R)$，$s\in S$，且满足特征条件4)之第三式，故

$$a(s, u-s) = 0$$

从而(6)、(7)成立。(7)说明$S(x, y)$是光顺问题(1)的解，由定理1、定理2，它是唯一解。

(6)、(7)分别称为第一积分关系和最小模性质。

3 算法与算例

假定I_1、I_2有唯一解，协调条件(3)成立，我们来分析决定$S(x, y)$的线方程组的具体形式及光顺因子ρ的选取。将(4)表为

$$S(x, y) = S_1(x, y) + \sum_{j=1}^{\mathring{N}} \sum_{\mu\in I_j} \sum_{\nu\in J_j} C_j^{\mu\nu} R_1 G_1^{(0,\mu)}(x, x_j) R_2 G_2^{(0,\nu)}(y, y_j) \tag{8}$$

其中$S_1(x, y)$为(4)的前四个和式组成。将(8)代入特征条件4)之第三式，即

$$\lambda_i^{\alpha\beta} S + (-1)^{m+n+\alpha+\beta} \frac{1}{\rho} [S^{(2m-\alpha-1, 2n-\beta-1)}(\cdot, \cdot)]_{x_i y_i} = F_i^{\alpha\beta}$$

$$\alpha\in I_i,\quad \beta\in J_i,\quad i=1,\ \cdots,\ \mathring{N}$$

从而得到决定系数$C=\{C_j^{\mu\nu}\}$. $j=1,\ \cdots,\ \mathring{N}$, $\mu\in I_j$, $\nu\in J_j$的线方程组:

$$AC=b \tag{9}$$

其中 $$A=(a_i^{\alpha\beta}{}_j^{\mu\nu}),\quad b=(b_i^{\alpha\beta}),\quad \alpha\in I_i,\ \beta\in J_i,$$

$$\mu\in I_j,\quad \nu\in J_j,\quad i,j=1,\ \cdots,\ \mathring{N}$$

$$a_i^{\alpha\beta}{}_j^{\mu\nu}=\lambda_i^{\alpha\beta}R_1G_1^{(0,\mu)}(x,\ x_j)R_2^{(0,\nu)}(y,\ y_j)$$

$$+(-1)^{m+n+\alpha+\beta}\frac{1}{\rho}[R_1G_1^{(2m-\alpha-1,\mu)}(\cdot,\ x_j)R_2G_2^{(2n-\beta-1,\nu)}(\cdot,y_j)]_{x_i,y_i} \tag{10}$$

$$b_i^{\alpha\beta}=F_i^{\alpha\beta}-\lambda_i^{\alpha\beta}S_1(x,\ y) \tag{11}$$

易知，当$i\neq j$或$\alpha\neq\mu$或$\beta\neq\nu$, $a_{ij}^{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}$中第二项均为零。从而与[5]相比，这里的系数矩阵$A$只是在对角线上有变化，从而$A$是对称的。最后，权因子$\rho$的选取可采用文[6]中的办法，令

$$\phi(\rho)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}(\lambda_i^{\alpha\beta}S-F_i^{\alpha\beta})^2$$

实际问题中要求对指定的$\varepsilon>0$，选取ρ，使$\phi(\rho)\leqslant\varepsilon$，记$f(\rho)=1/\phi(\rho)$，用牛顿迭代法解$f(\rho)=\varepsilon^{-1}$达到一定的精度要求即可，迭代序列为

$$\rho^{k+1}=\rho^k-\frac{f(\rho^k)-\varepsilon^{-1}}{f'(\rho^k)}=\rho^k-\frac{\phi(\rho^k)[\phi(\rho^k)-\varepsilon]}{\phi'(\rho^k)\cdot\varepsilon}$$

注意

$$\phi'(\rho)=\sum_{i=1}^{\mathring{N}}\sum_{\alpha\in I_i}\sum_{\beta\in J_i}(\lambda_i^{\alpha\beta}S-F_i^{\alpha\beta})\lambda_i^{\alpha}\ S'(\rho)$$

其中 $$S'(\rho)=\sum_{j=1}^{\mathring{N}}\sum_{\mu\in I_j}\sum_{\nu\in J_j}(C_j^{\mu\nu}(\rho))'R_1G_1^{(0,\mu)}(x,\ x_j)R_2G_2^{(0,\nu)}(y,\ y_j)$$

从而归结为求C'，由于方程组(9)具有形式

$$(B+\frac{1}{\rho}\mathrm{dig}\ a_{ii})C=b$$

两边关于ρ求导，得

$$(B+\frac{1}{\rho}\mathrm{dig}\ a_{ii})C'=\frac{1}{\rho^2}\mathrm{dig}\,a_{ii}C$$

因此，求$\phi'(\rho)$比起求S只是解一个仅是右端不同的线方程组而已。

上述方法容易编制程序在计算机上实现。下面两个例子是在微型机上计算的。$R=[1,2;\ 1,2]$, $m=n=2$, R内的五个光顺点是随意选取的，表中的误差是R内其他16个均

匀分布的点求得的。我们发现，光顺逼近不仅在光顺点上有满意的精度，而且在其他点上的平均误差和最大误差，多数情形下比插值逼近还要小一些。

例1 $F(x, y)=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}$（见表1）

表1

插值数据		平均误差		最大误差	
		光顺	插值	光顺	插值
F_i		3.9×10^{-5}	1.7×10^{-5}	9.5×10^{-5}	5.3×10^{-5}
F_i	F_i^{10}	1.1×10^{-5}	1.1×10^{-5}	3.0×10^{-5}	3.4×10^{-5}
F_i	F_i^{01}	4.9×10^{-6}	3.0×10^{-5}	1.1×10^{-5}	9.0×10^{-5}
F_i	F_i^{11}	1.6×10^{-5}	2.0×10^{-5}	4.1×10^{-5}	6.1×10^{-5}

例2 $F(x, y)=e^{-(x^2+y^2)}$（见表2）

表2

插值数据		平均误差		最大误差	
		光顺	插值	光顺	插值
F_i		6.3×10^{-4}	2.4×10^{-4}	1.5×10^{-3}	6.1×10^{-4}
F_i	F_i^{10}	7.1×10^{-4}	9.6×10^{-5}	1.8×10^{-3}	3.2×10^{-4}
F_i	F_i^{01}	3.8×10^{-5}	4.2×10^{-4}	8.3×10^{-5}	1.1×10^{-3}
F_i	F_i^{11}	8.1×10^{-5}	2.5×10^{-4}	2.2×10^{-4}	7.4×10^{-4}

参考文献

〔1〕Ahlberg, J.H., E. N. Nilson and J. L. Walsh, The Theory of Splines and Their Applications, Academic Press, New York 1967.

〔2〕Birkhoff, G. and de Boor, C., Piecewise polynomial interpolation and approximation, in Approximation of Functions, H. L. Garabedian ed., Elsevier, Amstertam, 1965, 164—190.

〔3〕Birkhoff, G. and H. L. Garabedian, Smooth surface interpolation, J. Math. Phys. 39(1960)258—268.

〔4〕Schumaker, L. L., Fitting surfaces to scattered data, in Approximation Theory II, edited by G. G. Lorentz, C. Chui, and L. L. Schumaker, Academic Press, New, York, 1976, 203—268.

〔5〕 Li Yuesheng, Multivariate optimal interpolation to scattered data throughout a rectangle I — with continuous boundary conditions. CAT 55, Center for Approximation theory, Dept. of Math. Texas A&M University.
〔6〕 G. I. Marchuk, Methods of Numerical Mathematics. Second Edition.

Approximation by Smoothing Splines to Scattered Data Throughout a Rectangle with Continuous Boundary Conditions

Hu Rizhang

Abstract

We consider the following approximation problem. Let R be a rectangle in the plane. For fixed $\rho\geqslant 0$, find a function $s(x,y)\epsilon H^{m,n}(\mathrm{R})$ minimizing the functional

$$J_{mn}(u)=\frac{1}{2}\iint_R (u^{m,n}(x,y))^2 dxdy+\frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^{\dot{N}}\sum_{\alpha\epsilon I_i}\sum_{\beta\epsilon J_i}(u^{(\alpha,\beta)}-F_i^{\alpha\beta})^2$$

The solution of the problem belongs to the generalized blending splines. Existence and uniqueness, first integral relation and the minimum-norm property are established. some numerical examples are given.

Keywerds Smooth approximation, continuous boundary conditions, scattered data