第29卷 第1期 1990年
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.29 №.1 1990

一定条件下结构可靠度的有界性质与随机许用应力

符明南 陈树坚
（应用力学与工程系）

摘 要

在结构材料抗力和工作应力均为高斯分布的情况下，证明了结构可靠度存在上确界，且得到它的表达式。在引入结构的真实可靠度和随机许用应力概念后，导出了以材料抗力和工作应力的均值、方差与随机许用应力表示的结构真实可靠度表达式，当结构真实可靠度预先给出时，还导出了随机许用应力表达式。

关键词 结构真实可靠度，随机许用应力，有界性，高斯过程

1 可靠性指数上确界

假设结构材料抗力$S(t)$和工作应力$D(t)$分别为服从高斯分布$N(\mu_S, \sigma_S^2)$和$N(\mu_D, \sigma_D^2)$的平稳随机过程，其中μ_S、μ_D、σ_S^2和σ_D^2分别是它们的均值与方差，它们的变异系数[1]分别以ν_S和ν_D表示，即$\nu_S=\sigma_S/\mu_S$，$\nu_D=\sigma_D/\mu_D$。

若以p表示结构的可靠度，依定义[2]

$$p=P\left(S(t)-D(t)>0\right) \tag{1}$$

由高斯分布性质可知

$$Z_p=(\mu_S-\mu_D)/\sqrt{\sigma_S^2+\sigma_D^2} \tag{2}$$

其中Z_p满足关系

$$p=\int_{-Z_p}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \tag{3}$$

从式(2)可见，一旦材料抗力和工作应力均值与方差已知，Z_p就被确定，从而p也为已确定的数，因此在工程中都把数Z_p取为衡量结构可靠性的指标，称作结构的可靠性指数[2,3]。目前在应用中可靠性指数是凭经验得出或由确定性方法中的许用应力值反推出的[2,3]，本文将严格地推导出可靠性指数的上确界，其结果将为可靠性指数的合理选择提供理论依据。

定理1 假设材料抗力$S(t)$和工作应力$D(t)$分别服从高斯分布$N(\mu_S, \sigma_S^2)$及$N(\mu_D, \sigma_D^2)$，则结构可靠性指数Z_p上确界$Z_{p\mu}$由下式给出

$$Z_{p\mu}=\sqrt{\nu_D^2+\nu_S^2}/(\nu_D\nu_S) \tag{4}$$

本文1988年11月22日收到

此处假设$\nu_D \neq 0$，$\nu_S \neq 0$，$\mu_D > 0$，$\mu_S > 0$。

证明 当$1-\nu_D^2 Z_p^2 \neq 0$，从式(2)可推出

$$\mu_D = \frac{1 \pm \sqrt{1-(1-Z_p^2\nu_D^2)(1-Z_p^2\nu_S^2)}}{1-Z_p^2\nu_D^2}\mu_S \tag{5}$$

因为μ_D及μ_S是正实数，所以要满足

$$(1-Z_p^2\nu_D^2)(1-Z_p^2\nu_S^2)<1$$

即

$$Z_p<\sqrt{\nu_D^2+\nu_S^2}/(\nu_D\nu_S) \tag{6}$$

若$\mu_D<\mu_s$，则从式(5)得

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-(1-Z_p^2\nu_D^2)(1-Z_p^2\nu_S^2)}}{1-Z_p^2\nu_D^2}<1 \tag{7}$$

求解式(7)得

$$0<Z_p<\frac{1}{\nu_D} \quad 及 \quad \frac{1}{\nu_D}<Z_p \tag{8}$$

若$\mu_D>\mu_S$，这时从式(5)得(7)式左边大于1。同样推出，Zp也必须满足式(8)。

若$\mu_D=\mu_s$，则从式(2)直接得出

$$Z_p=0 \tag{9}$$

当$1-\nu_D^2 Z_p^2=0$，从式(2)得

$$Z_p=\frac{1}{\nu_S}\sqrt{1-2\frac{\mu_D}{\mu_S}} \tag{10}$$

显然，这种情况只在$\mu_D<\frac{1}{2}\mu_S$时才可能出现。因此，综合(6)、(8)、(9)及(10)便可完成定理的证明。

推论1 假设满足与定理1相同的条件，则结构的可靠度p的上确界为

$$p_u=\int_{-z_{pu}}^{+\infty}(2\pi)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \tag{11}$$

其中Z_{pu}由式(4)给定。

证明 只要注意到(2)与(3)中p和Z_p的对应关系，并利用定理1，便可得证。

推论2 假设满足与定理1相同的条件，则结构工作应力变异系数ν_D上确界为：

$$\nu_{Du}=\nu_S/\sqrt{Z_{pu}^2\cdot\nu_S^2-1} \tag{12}$$

证明可直接由式(4)导出。

从式(12)不难看出，如果结构实际工作应力变异系数ν_D超过上确界，便可断定结构可靠度低于预定最佳的要求。利用这个结果，进行截面设计或可靠性检验，将会十分简便。

2 随机许用应力

目前，工程人员习惯于确定性许用应力为准则的设计计算方法，对基于可靠性分析的设计方法不易接受，其主要困难是可靠性分析的概念、方法与传统的确定性方法有着较大差别，为了克服这些方面带来的障碍，本文尝试在基于条件状态下的可靠性分析，

提出一种随机许用应力，它比较接近于确定性许用应力方法，从而便于一般工程人员的理解和接受。

定义 假设结构材料抗力和工作应力分别为随机过程$S(t)$和$D(t)$[1]，如果常数$[\sigma]$和$0<\beta\leqslant 1$满足关系式

$$\beta = P\left(S(t)-D(t)>0 \mid D(t)\leqslant[\sigma]\right) \tag{13}$$

就称$[\sigma]$为结构的具有可靠度β的随机许用应力，记作$[\sigma]_\beta$，称β为结构的真实可靠度。

定理2 假设结构材料抗力$S(t)$和工作应力$D(t)$满足定理1的条件，对于给定的随机许用应力$[\sigma]_\beta$，则结构的真实可靠度为

$$\beta = 1-\frac{\beta_2}{\beta_1} \tag{14}$$

式中，

$$\beta_1 = \Phi\left(\frac{[\sigma]_\beta-\mu_D}{\sigma_D}\right);$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_D}\int_{-\infty}^{[\sigma]_\beta}\Phi\left(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}\right)\exp\left[-\frac{(x-\mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right]dx;$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz \tag{15}$$

证明 根据式(13)及由条件概率定义有

$$\beta = \frac{P\left[\left(D(t)\leqslant[\sigma]_\beta\right)\cap\left(S(t)-D(t)>0\right)\right]}{P\left(D(t)\leqslant[\sigma]_\beta\right)} \tag{16}$$

又由假设条件及利用高斯分布性质可得

$$P\left[\left(D(t)\leqslant[\sigma]_\beta\right)\cap\left(S(t)-D(t)>0\right)\right]$$
$$=\Phi\left(\frac{[\sigma]_\beta-\mu_D}{\sigma_D}\right)-\int_{-\infty}^{[\sigma]_\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D}\Phi\left(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}\right)\exp\left[-\frac{(x-\mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right]dx \tag{17}$$

及

$$P\left(D(t)\leqslant[\sigma]_\beta\right)=\Phi\left(\frac{[\sigma]_\beta-\mu_D}{\sigma_D}\right) \tag{18}$$

将式(17)和(18)代入(16)便完成定理证明。

定理3 假设结构材料抗力$S(t)$和工作应力$D(t)$满足定理1的条件，对于预先给定的真实可靠度β，则对应的随机许用应力为

$$[\sigma]_\beta = (1-\nu_S C_\beta)\mu_S \tag{19}$$

其中C_β由下式决定：

$$1-\beta = \int_{-\infty}^{-C_\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx \tag{20}$$

证明 把式(14)改写为

$$(1-\beta)\Phi\left(\frac{[\sigma]_\beta-\mu_D}{\sigma_D}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_D}\int_{-\infty}^{[\sigma]_\beta}\Phi\left(\frac{x-\mu_S}{\sigma_S}\right)\exp\left[-\frac{(x-\mu_D)^2}{2\sigma_D^2}\right]dx \tag{21}$$

将式(21)两端对$[\sigma]_\beta$求导数，并化简可得

---

1)此处S(t)和D(t)为任意两个随机过程

$$\Phi\left(\frac{[\sigma]_\beta-\mu_s}{\sigma_S}\right)=1-\beta \tag{22}$$

利用标准高斯分布性质，由式(22)知

$$\frac{[\sigma]_\beta-\mu_s}{\sigma_S}=-C_\beta$$

由此导出式(19)，定理证毕。

例 已知国产船用钢3C屈服极限[2]的平均值$\mu_S=30.85\mathrm{kg/mm^2}$，变异系数$\nu_S=0.0744$[2)]，利用式(19)，对于给定的真实可靠度$\beta$的各个值，算出对应随机许用应力，其结果见表1。同时，为了与确定性方法的安全性概念比较，表中也给出了确定意义下的安全系数$n=\mu_S/[\sigma]_\beta$。由计算结果表明，随机许用应力$[\sigma]_\beta$从26.25～21.67kg/mm²时，真实可靠度为0.9772～0.9999683，而安全系数n从1.17～1.42，在$n=1.42$时，结构的失效率已低于十万分之四，即结构已有极高的安全度。依照我国现规范来校准，真实可靠度可取为0.99865～0.9999683。

表1 3C钢的随机许用应力与其真实可靠度的关系

Tab. 1 Relation between the random allowable stress and the realistic reliability of 3C stell

C_β	β	$[\sigma]_\beta$ (kg/mm²)	$n=\mu_S/[\sigma]_\beta$
2	0.9772	26.25	1.17
3	0.99865	23.96	1.29
3.5	0.999768	22.82	1.35
4	0.9999683	21.67	1.42

最后指出两点：

①按照确定性许用应力方法设计的结构，如果材料抗力和工作应力均服从高斯分布，对结构作可靠性分析时，其安全度应采用本文提出的结构真实可靠度来度量，不宜运用由式(1)定义的一般可靠度。因为按照确定性许用应力设计的结构的安全性分析已属于条件状态下的安全性问题，因此只能运用条件概率理论进行安全性分析。

②在满足定理1的条件下，结构的安全度可用式(13)定义的真实可靠度β来度量，它是严格地从随机过程$S(t)$与$D(t)$的分布函数导出，与此相比，传统的确定性方法中许用应力概念里所包含的安全度是凭人们经验给出的安全系数来表示，带有一定的盲目性。另外，对于按照确定性方法设计的结构，只要满足本文条件，可把确定性许用应力视为随机许用应力$[\sigma]_\beta$，应用式(14)就可以求出与之对应的结构真实可靠度，对结构可靠性分析十分方便。反之，对于预先给出结构真实可靠度时，可由式(19)确定对应的随机许用应力，为确定性设计中的许用应力选定提供参考。在文献[4]中所提出的可靠度是指通常的可靠度，与本文的真实可靠度概念不同，前者是无条件概率，后者为条件概率。

2)1970年国际船舶结构会议，第十委员会报告认为，屈服极限的变异系数ν_S为6～8%

参 考 文 献

〔1〕 A.H—S.ANG(美)、W.H.TANG(美)著，孙芳垂等译，工程规划与设计中的概率概念，冶金工业出版社，1985年

〔2〕 桑国光等，结构可靠性原理及其应用，上海交通大学出版社，1987年

〔3〕 汪德震，概率论、数学统计在建筑结构中的应用，吉林人民出版社，1982

〔4〕 Turgut Sarpkaya et al., *Mechanics of wave Forces On Offshore Structures*, Copyright by Litton Educational Publishing, In, C Published by Van Nostrand Reinhold Company, 1981

The Bounded Properties of the Structural Reliability and Random Allowable Stress under Some Conditiones

Fu Mingnan　Chen Shujian*

Abstract

Under the conditions that both the material resistance and structural response are Gaussian processes, we prove the existence of the structural reliable supremum and give an expression for this supremum. After introducing the concepts of the realistic reliability and the allowable stress, we develope a formula for calculating the realistic reliability through the random allowable stress and the mean value and variance of the material resistance and the working resistance. Also a formula for the random allowable stress is given when the realistic reliability is known.

Keywords structural realistic reliability, random allowable stress, bounded property, Gaussian process

* Department of Applied Mechanics and Engineering