

# 一类拟哈密顿系统的极限环\*

徐兆 杨宗炼

(力学系)

## 摘要

本文给出方程组  $\dot{x} = y^{2k-1} + \varepsilon P(x, y), \dot{y} = -g(x) + \varepsilon Q(x, y)$  存在极限环的若干定理并得到它的渐近解。文中还列举了实例。

**关键词** 极限环, 存在性, 稳定性, 相图

许多振动问题都归结为如下方程组

$$\dot{x} = y^{2k-1} + \varepsilon P(x, y), \quad \dot{y} = -g(x) + \varepsilon Q(x, y) \quad (1)$$

的研究, 其中  $\varepsilon$  为小参数。文[1—2]研究了  $k=1$  的情形并假设  $g(x), P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  为解析函数。本文考虑更一般的情形,  $k$  可以是任意的正整数, 上述三个非线性函数也不必是解析的。

## 1 极限环的存在性与稳定性

假设方程组(1)的  $g(x), P(x, y)$  和  $Q(x, y)$  是其变元的连续函数, 且有下面所需的各阶导数,  $g(0) = P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ 。令

$$V(x) = \int_0^x g(u) du \quad (2)$$

设存在四个数,  $\beta_2 < \beta_1 \leq 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2$ , 使  $V(\alpha_i) = V(\beta_i), i = 1, 2$ , 当  $x \in (\alpha_1, \alpha_2)$  及  $x \in (\beta_2, \beta_1)$  时,  $xg(x) > 0$ ; 当  $x \in (\beta, \alpha)$  时,  $V(\alpha) - V(x) > 0$ , 其中  $V(\alpha) = V(\beta), \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \beta \in (\beta_2, \beta_1)$ 。记

$$\Phi_0(a, \varphi) = \left\{ 2k[V(a+b) - V(a \cos \varphi + b)] \right\}^{\frac{2k-1}{2k}} / (a |\sin \varphi|) \quad (3)$$

其中

$$a+b = \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), -a+b = \beta \in (\beta_2, \beta_1), V(a+b) = V(-a+b) \quad (4)$$

本文1987年2月27日收到

\* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

在上述假设条件下,退化组( $\varepsilon=0$ ):

$$\dot{x} = y^{2k-1}, \quad \dot{y} = -g(x) \quad (5)$$

有周期解 $Ca$ :

$$x = x_0 = a \cos \varphi + b, \quad y = y_0 = -(a \Phi_0 \sin \varphi)^{1/2k-1} \quad (6)$$

其中 $a$ 和 $b$ 满足(4)式, $\varphi$ 为 $t$ 的函数

$$\dot{\varphi} = \Phi_0(a, \varphi) \quad (7)$$

定义函数 $Z(a)$ 如下:

$$Z(a) = \int_0^{2\pi} [Q(x_0, y_0) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} - P(x_0, y_0) \frac{\partial y_0}{\partial \varphi}] d\varphi \quad (8)$$

**定理** (i) 对充分小的 $\varepsilon$ , 方程组(1)在 $Ca_0$ 附近有极限环的必要条件是 $Z(a_0) = 0$ ;

(ii) 若 $Z(a_0) = 0$ , 又 $Z(a)$ 在 $a = a_0$ 不取极值, 则对充分小的 $\varepsilon$ , 方程组(1)在 $Ca_0$ 附近有极限环;

(iii) 若 $Z(a_0) = Z'(a_0) = \dots = Z^{(2n)}(a_0) = 0, \varepsilon Z^{(2n+1)}(a_0) < 0 (> 0)$ , 则对充分小的 $\varepsilon$ , 方程组(1)在 $Ca_0$ 附近有稳定(不稳定)的极限环;

(iv) 如果 $Z(a_0) = 0, Z'(a_0) \neq 0$ , 则对充分小的 $\varepsilon$ , 方程组(1)在 $Ca_0$ 附近有唯一的一个极限环.

**证明** 令 $A = a + b$ , 周期解 $Ca$ 的周期为 $\tau_0(A)$ , 设方程组(1)从点 $(\bar{A}, 0)$ 出发的解为

$$x = x_\varepsilon(t, \bar{A}), \quad y = y_\varepsilon(t, \bar{A}) \quad (9)$$

根据解对参数和初值的连续依赖性,  $\forall \eta > 0, \exists \delta > 0, \exists \varepsilon_0 > 0$ , 使当 $|\bar{A} - A| < \delta, |\varepsilon| < \varepsilon_0$ 时

$$\left. \begin{aligned} |x_\varepsilon(t, \bar{A}) - x_0(t, A)| < \eta, \quad |y_\varepsilon(t, \bar{A}) - y_0(t, A)| < \eta \\ |\tau_\varepsilon(\bar{A}) - \tau_0(A)| < \eta, \quad t \in [0, \tau_0(A)]. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

其中 $\tau_\varepsilon(\bar{A})$ 是解(9)第一次回到正 $x$ 轴所需的时间.

令 $U(x, y) = y^{2k}/(2k) + V(x)$ , 通过(1)求 $U(x, y)$ 对 $t$ 的导数,

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon [g(x)P(x, y) + y^{2k-1}Q(x, y)] + O(\varepsilon^2) \quad (11)$$

上式从 $O$ 到 $\tau_\varepsilon(\bar{A})$ 积分得

$$\begin{aligned} U[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(\bar{A}), \bar{A}), O] - U(\bar{A}, O) &= \varepsilon \int_0^{\tau_\varepsilon(\bar{A})} [g(x_0)P(x_0, y_0) \\ &+ y_0^{2k-1}Q(x_0, y_0)] dt + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (12)$$

把(6)和(7)代入上式得

$$V[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(\bar{A}), \bar{A})] - V(\bar{A}) = \varepsilon Z(a) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

(i) 若 $Z(a_0) \neq 0$ , 则当 $\varepsilon$ 和 $|a - a_0|$ 充分小时,  $Z(a) \neq 0$ , 由(13)可知, 在 $Ca_0$ 附近的轨线都不是闭的, 这就证明了定理的结论(i).

(ii) 若 $Z(a_0) = 0$ , 但 $Z(a)$ 在 $a = a_0$ 不取极值, 则 $\forall \eta > 0, \exists \delta, 0 < \delta < \eta$ , 使 $Z(a_0 - \delta) \neq Z(a_0 + \delta)$ 异号. 因此在 $A_0 = a_0 + b_0$ 附近必有 $A$ 使

$$V[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(A), A)] - V(A) = 0$$

因此, 方程组(1)由\$(A, 0)\$出发的轨线是闭的. 结论(ii)得证.

(iii) 若 \$Z(a\_0) = Z'(a\_0) = \dots = Z^{(2n)}(a\_0) = 0\$, \$\varepsilon Z^{(2n+1)}(a\_0) < 0\$, 则存在 \$\bar{\delta} > 0\$, 使 \$\varepsilon Z(a\_0 - \bar{\delta}) > 0, \varepsilon Z(a\_0 + \bar{\delta}) < 0\$, 因此, 当 \$\varepsilon\$ 充分小且 \$A\_0 - \bar{\delta} < A < A\_0\$ 时

$$V[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(A), A)] - V(A) > 0$$

而当 \$A\_0 < \bar{A} < A\_0 + \bar{\delta}\$ 时

$$V[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(\bar{A}), \bar{A})] - V(\bar{A}) < 0$$

由环域定理<sup>(3)</sup>可知, 方程组(1)在 \$Ca\_0\$ 附近有稳定的极限环.

如果 \$\varepsilon Z^{(2n+1)}(a\_0) > 0\$, 则同法可证有不稳定的极限环. 结论(iii)成立.

(iv) 如果 \$Z(a\_0) = 0, Z'(a\_0) \neq 0\$, 则由结论(ii), 极限环是存在的. 现在要证明极限环的唯一性. 用反证法, 设有 \$\varepsilon\_i \to 0, (i \to \infty)\$, 使方程组(1)在 \$Ca\_0\$ 附近有两个极限环, 因而有 \$a\_i^{(1)} \to a\_0, a\_i^{(2)} \to a\_0\$, 使 \$A\_i^{(1)} = a\_i^{(1)} + b\_i^{(1)} \to A\_0, A\_i^{(2)} = a\_i^{(2)} + b\_i^{(2)} \to A\_0\$,

$$V[x_{\varepsilon_i}(\tau_{\varepsilon_i}(A_i^{(j)}), A_i^{(j)})] - V(A_i^{(j)}) = 0, (j=1, 2, i=1, 2, \dots)$$

按 Rolle 定理, 在 \$A\_i^{(1)}\$ 和 \$A\_i^{(2)}\$ 之间存在 \$\bar{A}\_i = a\_i + b\_i\$ 使

$$\frac{\partial}{\partial A} \left\{ V[x_\varepsilon(\tau_\varepsilon(A), A)] - V(A) \right\} \Big|_{\substack{A = \bar{A}_i \\ \varepsilon = \varepsilon_i}} = 0$$

由(13)得

$$\varepsilon_i Z'(a_i) \cdot \frac{da}{dA} \Big|_{A = a_i + b_i} + O(\varepsilon_i^2) = 0 \quad (14)$$

$$\text{其中 } \varepsilon_i \neq 0, \frac{da}{dA} \Big|_{A = a_i + b_i} = -\frac{g(-a_i + b_i) - g(a_i + b_i)}{2g(-a_i + b_i)} \neq 0$$

于是, 由(14)得到

$$Z'(a_i) + O(\varepsilon_i) = 0$$

在上式中令 \$i \to \infty\$, 即得 \$Z'(a\_0) = 0\$, 与假设矛盾. 定理证毕.

## 2 含参数系统的极限环

现在研究系统中含有某个参数 \$\mu\$ 的情形:

$$\dot{x} = y^{2k-1} + \varepsilon P(x, y, \mu), \quad \dot{y} = -g(x) + \varepsilon Q(x, y, \mu) \quad (15)$$

此时(8)式的右端将依赖于 \$\mu\$, 假设

$$Z(a, \mu) = [\mu - \bar{\mu}(a)]Z^*(a, \mu)$$

其中 \$Z^\*(a, \mu) > 0\$, 而 \$\bar{\mu}(a)\$ 是某一个仅依赖于 \$a\$ 的函数. 于是 \$Z(a, \mu) = 0\$ 的点满足

$$\mu = \bar{\mu}(a), \quad \frac{dZ}{da} = -\bar{\mu}'(a)Z^*(a, \mu) \quad (16)$$

由此可知 \$\frac{dZ}{da}\$ 与 \$\bar{\mu}'(a)\$ 的符号相反. 假设 \$\varepsilon > 0, \bar{\mu}'(a) > 0\$, 则 \$\varepsilon \frac{dZ}{da} < 0\$, 由定理可知, 对

应的极限环是稳定的。相反，若  $\bar{\mu}'(a) < 0$ ，则对应的极限环是不稳定的。这样就可以用下述的作图法来分析极限环的性质。

作曲线  $\mu = \bar{\mu}(a)$  (图1)，那末极限环的个数由直线  $\mu = \mu_0$  和这条曲线的交点数所确定。位于曲线上上升段的交点(如图1的B, D)对应稳定的极限环；而位于曲线下下降段的交点(如图1的A, C)对应于不稳定的极限环；曲线上导数为零的点(如图1的E, F和G)对应于半稳定的极限环。

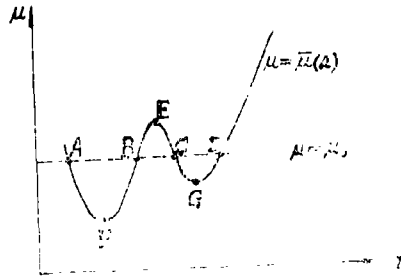


图 1

### 3 极限环的渐近解

为了得到极限环的近似表达式，我们应用渐近方法<sup>[1]</sup>讨论方程组(1)，把它的解表示为

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0(a, \varphi) + \varepsilon x_1(a) + \varepsilon^2 x_2(a) + \dots \\ y &= y_0(a, \varphi) + \varepsilon y_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 y_2(a, \varphi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中  $a$  和  $\varphi$  是时间的函数，由下面的微分方程决定

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon A_1(a) + \varepsilon^2 A_2(a) + \dots \\ \dot{\varphi} &= \Phi_0(a, \varphi) + \varepsilon \Phi_1(a, \varphi) + \varepsilon^2 \Phi_2(a, \varphi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中  $\Phi_0(a, \varphi)$ ,  $x_0(a, \varphi)$  和  $y_0(a, \varphi)$  分别由(3)和(6)确定。把(17)和(18)代入方程组(1)，使等式两边  $\varepsilon$  的相同幂次的系数相等，得到下列方程：

$$(2k-1)y_0^{2k-2} y_i = \Phi_i \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + A_i \frac{\partial x_0}{\partial a} + G_{i-1} \quad (19)$$

$$\Phi_0 \frac{\partial y_i}{\partial \varphi} = -\Phi_i \frac{\partial y_0}{\partial \varphi} - A_i \frac{\partial y_0}{\partial a} - g'(x_0)x_i + H_{i-1} \quad (20)$$

( $i=1, 2, \dots$ )，其中  $G_{i-1}$  和  $H_{i-1}$  为  $x_0, \dots, x_{i-1}, y_0, \dots, y_{i-1}, A_1, \dots, A_{i-1}, \Phi_0, \dots, \Phi_{i-1}$  的已知函数：

$$G_0 = -P(x_0, y_0), \quad H_0 = Q(x_0, y_0)$$

$$G_1 = -\frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial x} x_1 - \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial y} y_1 - \frac{y_1^2}{2} (2k-1)(2k-2)y_0^{2k-3} + A_1 \frac{dx_1}{da}$$

$$H_1 = \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial x} x_1 + \frac{\partial Q(x_0, y_0)}{\partial y} y_1 - A_1 \frac{\partial y_1}{\partial a} - \Phi_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} - \frac{x_1^2}{2} g''(x_0)$$

.....

由(19)和(20)消去  $y_i$  得

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \Phi_i y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right] = (2k-1) \left[ -A_i \frac{\partial}{\partial a} \left( y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \right) - x_i g'(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + f_{i-1}(a, \varphi) \right]$$

$$+ (2k-2) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ y_0 (A_i \frac{\partial x_0}{\partial a} + K_{i-1}) \right] \tag{21}$$

其中  $f_{i-1}$  和  $K_{i-1}$  也是已知函数:

$$f_0 = Q(x_0, y_0) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + y_0 \frac{\partial P(x_0, y_0)}{\partial \varphi}, \quad K_0 = -P(x_0, y_0),$$

$$f_1 = H_1 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + y_0 \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ -G_1 + A_1 \frac{dx_1}{da} \right], \quad K_1 = G_1 - A_1 \frac{dx_1}{da},$$

.....

对(21)从 0 到  $\varphi$  积分, 然后分别令  $\varphi = \pi, 2\pi$ , 得

$$A_i(a) = \int_0^{2\pi} f_{i-1}(a, \varphi) d\varphi / \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a} (y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}) d\varphi \tag{22}$$

$$x_i(a) = \frac{A_i \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial a} (y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}) d\varphi - \int_0^\pi f_{i-1}(a, \varphi) d\varphi}{g(a+b) - g(-a+b)} \tag{23}$$

$$\Phi_i(a, \varphi) = \int_0^\varphi \left\{ (2k-1) \left[ -A_i \frac{\partial}{\partial a} (y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi}) - x_i g'(x_0) \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} + f_{i-1}(a, \varphi) \right] \right. \\ \left. + (2k-2) \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ y_0 (A_i \frac{\partial x_0}{\partial a} + K_{i-1}) \right] \right\} d\varphi / y_0 \frac{\partial x_0}{\partial \varphi} \tag{24}$$

而  $y_i(a, \varphi)$  则由(19)确定。此外, 不难证明(22)和(23)的分母不等于零。

为了求极限环, 只要令(18)第一式的右端为零, 求出  $a = a_0$ , 代入(17)就得极限环的渐近解。如果考虑第一次近似解, 则  $a_0$  由  $A_1(a_0) = 0$  确定, 即  $a_0$  是

$$\int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi) d\varphi = 0 \tag{25}$$

的根。这与令(8)式所定义的  $Z(a) = 0$  所得的结果是相同的。

#### 4 举 例

例 1 研究有间隙的自振系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -g(x) + \varepsilon(\mu - x^2)y \tag{26}$$

其中 
$$g(x) = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ x+1, & x \leq -1. \end{cases}$$

这里  $P(x, y) = 0$ ,  $Q(x, y) = (\mu - x^2)y$ ,  $k=1$ , 函数  $V(x) = \int_0^x g(u)du$  的图形如图 2 所示, 由此可知,  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = +\infty, \beta_1 = -1, \beta_2 = -\infty; b=0, a>1$ ; 按(3)得

$$\Phi_0(a, \varphi) = \begin{cases} a |\sin \varphi|^{-(a-1)}, & |\cos \varphi| < 1, \\ \frac{1}{a |\sin \varphi|} \left[ (a-1)^2 - (|\cos \varphi| - 1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, & |\cos \varphi| \geq 1, \end{cases}$$

$$x_0(a, \varphi) = a \cos \varphi, \quad y_0(a, \varphi) = -a \Phi_0 \sin \varphi,$$

代入(8)并令 $Z(a) = 0$ 得

$$\mu = \bar{\mu}(a) = \left[ \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4}(a-1) + \frac{2}{3}(a-1)^2 + \frac{\pi}{16}(a-1)^3 \right] / [1 + \pi(a-1)/4]$$

曲线 $\mu = \bar{\mu}(a)$ 如图3所示,它是 $a$ 的单调上升曲线,当 $a = 1$ 时, $\mu = \frac{1}{3}$ .由定理可以得到:

对于充分小的 $\varepsilon > 0$ ,当 $\mu > \frac{1}{3}$ 时,方程组(26)存在唯一的且稳定的极限环.

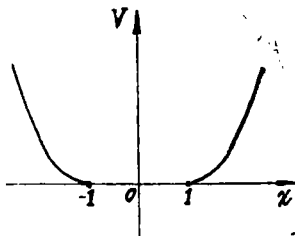


图 2

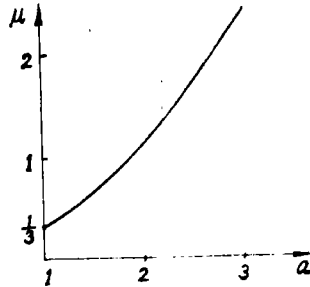


图 3

**例 2 考察含有复杂奇点的系统**

$$\dot{x} = y^3 + \varepsilon x^2 y, \quad \dot{y} = -(x^2 + x^3) + \varepsilon(\mu - y^2)y \tag{27}$$

其中小参数 $\varepsilon > 0$ ,参数 $\mu > 0$ ,这里 $P(x, y) = x^2 y, k=2, Q(x, y) = (\mu - y^2)y, g(x) = x^2 + x^3,$

$V(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ,函数 $V(x)$ 的图形如图4

所示.方程组(27)有两个奇点: $O(0,0)$ 为复杂奇点, $M(-1,0)$ 为焦点.

先考虑同时包围两个奇点的极限环.由图

4可知, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = +\infty, \beta_1 = -\frac{4}{3}, \beta_2 =$

$-\infty, a > \frac{2}{3}$ ,由 $V(a+b) = V(-a+b)$ 得

$$b^3 + b^2 + a^2 b + \frac{1}{3}a^2 = 0 \tag{28}$$

对于任给 $a > \frac{2}{3}$ ,上式有唯一的实根 $b$ .

按(3)和(6)求得

$$\Phi_0(a, \varphi) = \frac{1}{a|\sin\varphi|} \cdot \left\{ a^2(1 - \cos^2\varphi) \left[ a^2 + 6\left(b + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} + 4\left(b + \frac{1}{3}\right) a \cos\varphi + a^2 \cos^2\varphi \right] \right\}^{\frac{3}{4}}$$

$$x_0(a, \varphi) = a \cos\varphi + b, \quad y_0 = -(a\Phi_0 \sin\varphi)^{\frac{1}{3}}$$

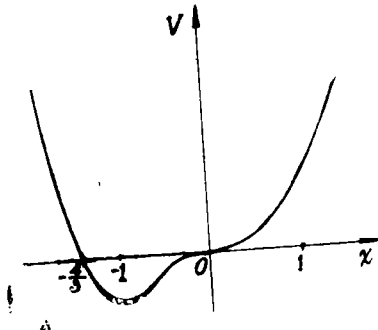


图 4

代入(8)并令 $Z(a)=0$ , 得到

$$\mu = \bar{\mu}(a) = \frac{a \int_0^\pi [F(a, \varphi)]^{\frac{3}{4}} \sin \varphi d\varphi}{\int_0^\pi [F(a, \varphi)]^{\frac{1}{4}} \sin \varphi d\varphi}$$

其中 $F(a, \varphi) = (1 - \cos^2 \varphi) \left[ a^2 + 6 \left( b + \frac{1}{3} \right)^2 - \frac{2}{3} + 4 \left( b + \frac{1}{3} \right) a \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \right]$ . 用数值积分法求得曲线 $\mu = \bar{\mu}(a)$ 如图5所示. 函数 $\bar{\mu}(a)$ 仅有一个极值, 在 $a = a_* \approx 0.764$ 取极小值 $\mu_* \approx 0.396$ . 在左端点 $a = \frac{2}{3}$ ,  $\mu = \bar{\mu} \approx 0.417$ .

再研究仅包围奇点 $M(-1, 0)$ 的极限环. 作坐标平移,  $x \rightarrow x-1, y \rightarrow y$ , 则方程组(27)化成

$$\dot{x} = y^3 + \varepsilon(x-1)^2 y, \quad \dot{y} = -(x-2x^2+x^3) + \varepsilon(\mu-y^2)y \quad (29)$$

这里 $g(x) = x - 2x^2 + x^3$ ,  $\bar{V}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ , 函数 $\bar{V}(x)$ 的图形可由图4向右和向上平移得到. 由此不难求得 $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $a < \frac{2}{3}$ , 而由 $\bar{V}(a+b) = \bar{V}(-a+b)$ 得

$$b^3 - 2b^2 + (a^2 + 1)b - \frac{2}{3}a^2 = 0 \quad (30)$$

对于 $a \in (0, \frac{2}{3})$ , 上式有唯一的实根.

按前面同样方法得

$$\mu = \bar{\bar{\mu}}(a) = a \frac{\int_0^\pi [\bar{F}(a, \varphi)]^{\frac{3}{4}} \sin \varphi d\varphi}{\int_0^\pi [\bar{F}(a, \varphi)]^{\frac{1}{4}} \sin \varphi d\varphi}$$

其中 $\bar{F}(a, \varphi) = (1 - \cos^2 \varphi) \left[ a^2 + 6 \left( b - \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{2}{3} + 4 \left( b - \frac{2}{3} \right) a \cos \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \right]$ . 函数 $\bar{\bar{\mu}}(a)$ 的图形如图6所示, 它有一个极值——极大值, 在 $a \approx 0.553$ , 取极大值 $\mu^* \approx 0.428$ , 在右端点 $a = \frac{2}{3}$ ,  $\mu = \bar{\bar{\mu}} \approx 0.417$ .

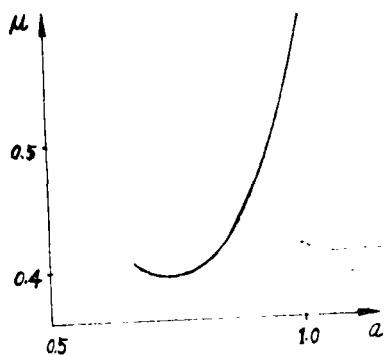


图 5

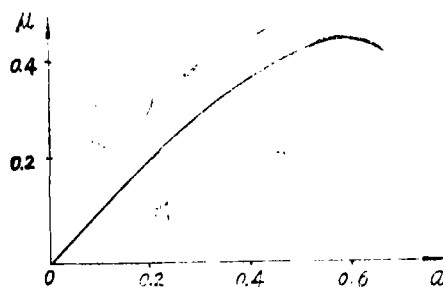


图 6

综上所述, 方程组(27)的极限环分布如图7所示。

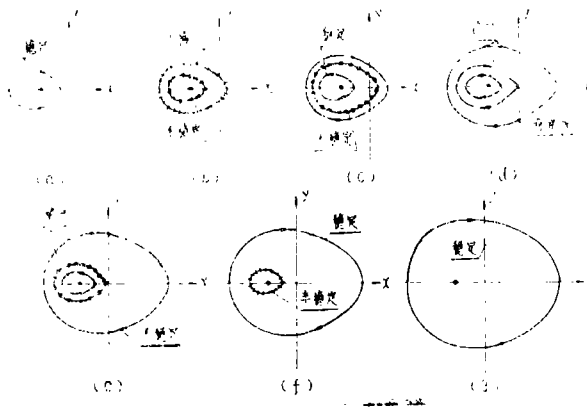


图 7

- (a)  $0 < \mu < \mu_*$       (b)  $\mu = \mu_* \approx 0.396$       (c)  $\mu_* < \mu < \bar{\mu}$   
 (d)  $\mu = \bar{\mu} \approx 0.417$       (e)  $\bar{\mu} < \mu < \mu^*$       (f)  $\mu = \mu^* \approx 0.428$       (g)  $\mu > \mu^*$

### 参 考 文 献

- [1] 徐兆, 非线性力学中一种新的渐近方法, 力学学报, 3 (1985).  
 [2] 徐兆, 二维系统的渐近解法, 中山大学学报(自然科学版), 1986, 4.  
 [3] 吴福光, 蔡承武, 徐兆, 振动理论, 高等教育出版社, 1987.

## Limit Cycles of a Quasi-Hamiltonian System

Xu Zhao

Yang Zonglian

### Abstract

We prove some theorems on limit cycles of the system  $\dot{x} = y^{2k+1} + \epsilon P(x, y)$ ,  $\dot{y} = -g(x) + \epsilon Q(x, y)$  and its asymptotic solution is given. To illustrate the use of the results obtained in this paper, two examples are given.

**Keywords** limit cycle, existence, stability, phase portrait