中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 No.1
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

变分累积展开到二级的单链 SU(3) 群积分*

刘金明　　宫蒂
（物理学系）　　（无线电电子学系）

摘　要

用变分累积展开到二级讨论SU(3)格点规范理论时，所遇单链SU(3)群积分都可用4个基本的SU(3)群积分表示。这4个基本的SU(3)群积分在不便用幂级数展开方法计算的弱耦合区，都可用最陡下降法表示成容易求其数值的一元实变函数的定积分。

关键词　格点规范理论，SU(3)群，最陡下降法

1 引 言

在格点规范理论中，常常要计算单链配分函数及相连系的群元素乘积的平均值[1～6]。对于SU(3)格点规范理论，用变分累积展开到二级，需要计算以下单链SU(3)群积分

$$Z(J,J^+)=\int dU\ e^{T_r(J^+U+U^+J)} \tag{1}$$

$$A(J,J^+)=\int dU\ e^{T_r(J^+U+U^+J)}\ T_rUT_rU^+ \tag{2}$$

$$B(J,J^+)=\int dU\ e^{T_r(J^+U+U^+J)}\ (T_rU)^2 \tag{3}$$

$$C(J,J^+)=\int dU\ e^{T_r(J^+U+U^+J)}\ T_rU^2 \tag{4}$$

式中U为SU(3)群元素，J是一个固定的3×3矩阵，dU为SU(3)群流形上的归一化不变Haar测度。式(1)的积分叫做单链配分函数。对于群元素U和U^+的任意多项式$P(U,U^+)$的平均值，可用对J的微商求得[7]

$$\langle P(U,U^+)\rangle=P\left(\frac{\partial}{\partial J^+},\ \frac{\partial}{\partial J}\right)\ln Z(J,J^+) \tag{5}$$

具体求(1)～(5)式的值很困难，往往成为SU(3)格点规范理论计算和分析工作中的一个难点。许多论文研究了单链SU(3)配分函数的计算[7～10]，其中文献[7]给出了最便于处理的公式为

$$Z(J,J^+)=-\frac{i}{\pi}\oint dx\ e^{xQ}\sqrt{\frac{x}{P}}\,I_1\left(2\sqrt{\frac{P}{x}}\right) \tag{6}$$

本文1989年1月16日收到
* 中山大学高等学术研究中心资助项目

式中，对x的回路积分是沿复x平面上绕原点的一个封闭回路进行的。I_1为一阶虚宗量贝塞尔函数，P和Q分别为

$$P=\det(1+xJJ^+),\quad Q=\det J+\det J^+ \tag{7}$$

文献〔10〕给出了(1)式的无穷级数展开式

$$Z(J,J^+)=2\sum_{j,k,l,n=0}^{\infty}\left[1/(j+2k+3l+n+2)!(k+2l+n+1)!\right]\cdot\left[X_1^jX_2^kX_3^lX_4^n\Big/j!k!l!n!\right] \tag{8}$$

式中 $X_1=T_rJJ^+$，$X_2=\frac{1}{2}\left[(T_rJJ^+)^2-T_r(JJ^+)^2\right]$，$X_3=\det JJ^+$，$X_4=\det J+\det J^+$ (9)

由于(6)式含有复杂函数的复变函数积分，求此积分值是很困难的。而(8)式是具有四重求和的无穷级数，直接代进(5)式求平均值$\langle P(U,U^+)\rangle$，也是很困难的。在变分计算中，我们常作进一步的简化，取

$$J=zI \tag{10}$$

式中I代表3×3单位矩阵，z为实数变分参数。这时(1)～(4)式简化为

$$Z(z)=\int dU\, e^{zT_r(U+U^+)} \tag{11}$$

$$A(z)=\int dU\, e^{zT_r(U+U^+)}\,T_rUT_rU^+ \tag{12}$$

$$B(z)=\int dU\, e^{zT_r(U+U^+)}\,(T_rU)^2 \tag{13}$$

$$C(z)=\int dU\, e^{zT_r(U+U^+)}\,T_rU^2 \tag{14}$$

即使J已是最简单的外源，但直接应用(6)式或(8)式求$A(z)$，$B(z)$和$C(z)$仍然很不方便，尤其当变分参数z很大，即在弱耦合区，计算量更大。文献〔11〕指出当$z\geqslant 2$时，可用最陡下降法将单链SU(3)配分函数$Z(z)$表示成容易用数值计算法求值的一元实变函数的定积分。本文将指出最陡下降法对于计算$A(z)$，$B(z)$和$C(z)$也是有效的。

2　$Z(z)$,$Z'(z)$和$Z''(z)$的定积分表示式

为了完整地给出$A(z)$，$B(z)$和$C(z)$的表示式，本节先给出$Z(z)$，$Z'(z)$和$Z''(z)$的定积分表示式。文献〔11〕已给出单链SU(3)配分函数$Z(z)$，当$z\geqslant 2$时，可表示为

$$Z(z)=\frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, e^{zf_1(\varphi)}f_0(\varphi)\left[1-\frac{a_1(\varphi)}{z}-\frac{a_2(\varphi)}{z^2}-\frac{a_3(\varphi)}{z^3}\right] \tag{15}$$

式中我们作了如下的代换

$$x_0=1/\left[z^2(y_0^2-1)\right] \tag{16}$$

式中，y_0只是φ的函数，与z无关。

$$y_0=[(1+\sin\varphi)/\cos\varphi]^{\frac{1}{3}}+[(1-\sin\varphi)/\cos\varphi]^{\frac{1}{3}} \tag{17}$$

其它的量，分别为

$$a_0 = 4/(3^{\frac{1}{3}}\pi^{3/2})$$

$$f_1(\varphi) = 6(1+y_0\cos\varphi)/(y_0^2-1)$$

$$f_0(\varphi) = \begin{cases} \left[\sin^2\varphi/(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[y_0^{\frac{1}{2}}\Big/\left(y_0^2-1\right)^{3/2}\right] & \varphi\neq\frac{\pi}{2} \\ 0 & \varphi=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$a_1(\varphi) = \left(5y_0^4+5y_0^2-1\right)\Big/\left[36y_0^3\left(y_0^2-1\right)\cos\varphi\right]$$

$$a_2(\varphi) = \left[5\Big/\left(2^5\cdot3^4y_0^6\left(y_0^2-1\right)^2\cos^2\varphi\right)\right]\left(7y_0^8+14y_0^6+21y_0^4-22y_0^2+7\right)$$

$$a_3(\varphi) = \left(35A_3(\varphi)\right)\Big/\left[2^{13}\cdot3^7y_0^9\left(y_0^2-1\right)^3\cos^3\varphi\right] \tag{18}$$

$$A_3(\varphi) = 1216y_0^{12}+8256y_0^{10}+6144y_0^8+22336y_0^6-49152y_0^4+35904y_0^2-9152$$

于是在$Z(z)$的定积分表示式中，各个量依赖于z的函数关系都已明显表示出来。因此可求得$Z(z)$的一级和二级微商$Z'(z)$和$Z''(z)$

$$Z'(z) = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi e^{zf_1(\varphi)}f_0(\varphi)\left[P_0(\varphi)+P_1(\varphi)/z+P_2(\varphi)/z^2+P_3(\varphi)/z^3\right] \tag{19}$$

$$Z''(z) = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi e^{zf_1(\varphi)}f_0(\varphi)\left[D_0(\varphi)+D_1(\varphi)/z+D_2(\varphi)/z^2+D_3(\varphi)/z^3\right] \tag{20}$$

式中 $P_0(\varphi)=f_1(\varphi)$，$P_1(\varphi)=-\frac{5}{2}-a_1(\varphi)\cdot f_1(\varphi)$，$P_2(\varphi)=\frac{7}{2}a_1(\varphi)-a_2(\varphi)f_1(\varphi)$，

$$P_3(\varphi)=\frac{9}{2}a_2(\varphi)-a_3(\varphi)\cdot f_1(\varphi),\quad D_0(\varphi)=f_1^2(\varphi),\quad D_1(\varphi)=-5f_1(\varphi)-a_1(\varphi)\cdot f_0^2(\varphi)$$

$$D_2(\varphi)=\frac{35}{4}+7a_1(\varphi)f_1(\varphi)-a_2(\varphi)\cdot f_1^2(\varphi)$$

$$D_3(\varphi)=-\frac{63}{4}a_1(\varphi)-9a_2(\varphi)f_1(\varphi)-a_3(\varphi)\cdot f_1^2(\varphi) \tag{21}$$

3 $A(z)$,$B(z)$和$C(z)$的计算

由(9)式，可写

$$Z(J,J^+)=Z(X_1,X_2,X_3,X_4) \tag{22}$$

定义简写符号

$$Z_i(z)=\left.\frac{\partial Z}{\partial X_i}\right|_{J=zI},\quad Z_{kl}(z)=\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial X_k\partial X_l}\right|_{J=zI}\quad i,k,l=1,\cdots 4 \tag{23}$$

由(9)式，直接计算可得

$$\left.\frac{\partial X_k}{\partial J_{\beta\alpha}}\right|_{J=zI}=g_k\delta_{\alpha\beta},\quad \left.\frac{\partial^2 X_k}{\partial J_{\beta\alpha}\partial J_{ji}}\right|_{J=zI}=h_k(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}-\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}) \tag{24}$$

式中 $g_1=z$，$g_2=2z^3$，$g_3=z^5$，$g_4=z^2$

$h_1=0$，$h_2=z^2$，$h_3=z^4$，$h_4=z$ (25)

于是利用公式(5)可得

$$\int \mathrm{d}U\, e^{zT_r(U+U^+)}\, U_{ij} = V\delta_{ij} \tag{26}$$

$$\int \mathrm{d}U\, e^{zT_r(U+U^+)}\, U_{ij}U_{\alpha\beta} = K\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - H\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i} \tag{27}$$

$$\int \mathrm{d}U\, e^{zT_r(U+U^+)}\, U_{ij}U^+_{\alpha\beta} = F\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + G\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i} \tag{28}$$

式中　$V = Z_k\, g_k$，　$K = Z_{kl}\, g_k\, g_l + Z_k h_k$，　$H = Z_k h_k$

$$F = Z_{kl}\, g_k g_l + z^2 Z_2 + z^4 Z_3, \quad G = Z_1 + z^2 Z_2 \tag{29}$$

式(24)～(29)中，各个z的函数的宗量都不明显写出来。容易证明

$$V = \left(\frac{1}{6}\right)Z',\ F + 3G = Z,\ F = K - zZ_4,\ Z' = 6z(H+G),\ Z'' = 6(3K - H + 3F + G) \tag{30}$$

因此(29)式中给出的K,H,F和G可用Z,Z',Z''和Z_4 4个基本的SU(3)群积分表示：

$$G = \frac{3}{16}\left(2Z - \frac{1}{18z}Z' - \frac{1}{18}Z'' + zZ_4\right),\ H = \frac{1}{8}\left(-3Z + \frac{17}{12z}Z' + \frac{1}{12}Z'' - \frac{3}{2}zZ_4\right)$$

$$F = \frac{1}{8}\left(-Z + \frac{1}{4z}Z' + \frac{1}{4}Z'' - \frac{9}{2}zZ_4\right),\ K = \frac{1}{8}\left(-Z + \frac{1}{4z}Z' + \frac{1}{4}Z'' + \frac{7}{2}zZ_4\right) \tag{31}$$

于是用4个基本的SU(3)群积分表示的$A(z)$,$B(z)$和$C(z)$得

$$A(z) = 9F + 3G = (1/4z)Z' + (1/4)Z'' - (9/2)zZ_4 \tag{32}$$

$$B(z) = 9K - 3H = -(1/4z)Z' + (1/4)Z'' + (9/2)zZ_4 \tag{33}$$

$$C(z) = 3K - 9H = 3z - (3/2z)Z' + 3zZ_4 \tag{34}$$

4　Z_4的计算

由(6)式和(23)式得

$$Z_4(z) = \frac{\partial Z(J,J^+)}{\partial X_4}\bigg|_{J=zI} = -\frac{i}{\pi}\oint \mathrm{d}x\, e^{xQ}\, x\sqrt{\frac{x}{P}}\, I_1\left(2\sqrt{\frac{P}{x}}\right)\bigg|_{J=zI}$$

用I_1的积分表示代入上式，并与对x的积分交换顺序[11]，便得

$$Z_4(z) = -\frac{2i}{\pi^2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi \oint \mathrm{d}x\, e^{2z^3\hat{f}(x)}\, x \tag{35}$$

式中　$$\hat{f}(x) = x + [x + (1/z^2)]^{3/2}\, x^{-\frac{1}{2}}\cos\varphi \tag{36}$$

当$2z^3 \gg 1$时对x的回路积分可用最陡下降法求积[11]，即将绕原点的回路取为过鞍点x_0的最陡路线C_P与半圆周C_R组成的包围原点的闭合回路。这两个回路积分的鞍点x_0的位置都由同一个方程$\hat{f}'(x_0) = 0$确定。因此，当$\cos\varphi > 0$时，在实轴上有一个鞍点x_0，即(16)和(17)式所给的值[11]。当$\cos\varphi < 0$时，在实轴上没有鞍点，这时积分值随参量z的增大而指数下降，计算表明$z \geqslant 2$时，这部分积分的贡献可以忽略不计。当$\cos\varphi = 0$时，显然对x的回路积分值为0。因此，当$z \geqslant 2$时，(35)式中我们可以只计算$\cos\varphi > 0$的贡献。作变数变换

$$W = x - x_0, \quad f(W) = \hat{f}(x) - \hat{f}(x_0) \tag{37}$$

得　$$Z_4(z) = -\frac{2i}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\, \sin^2\varphi\, e^{zf_1(\varphi)} \oint \mathrm{d}W e^{2z^3 f(W)}\, (W + x_0) \tag{38}$$

式中$f_1(\varphi)$已由(23)式给出。在新的积分变量W中，鞍点就是$W=0$。在鞍点邻域把$f(W)$展成幂级数

$$f(W)=W^2(b_0+b_1W+b_2W^2+b_3W^3+\cdots) \tag{39}$$

式中
$$b_0=z^2\left[3(y_0^2-1)^3/8y_0\right]\cos\varphi$$
$$b_1=-z^4\left[(y_0^2-1)^4/(2^4y_0^3)\right](5y_0^2+1)\cos\varphi$$
$$b_2=z^6\left[(y_0^2-1)^5/(2^7y_0^5)\right](35y_0^4+10y_0^2+3)\cos\varphi$$
$$b_3=-z^8\left[3(y_0^2-1)^6/(2^8y_0^7)\right](21y_0^6+7y_0^4+3y_0^2+1)\cos\varphi \tag{40}$$

由于b_0为正实数，所以在复W平面上，虚轴就是被积函数的负扇区中的最陡下降路线C_P，而且沿半圆周C_R的积分$\to 0$，于是应用$2z^3\gg 1$条件下，复变函数积分的最陡下降路线积分公式[12]求得

$$\oint dWe^{2z^3f(W)}W=i\sqrt{\pi}\,d_1(1/2z^3b_0)^{3/2}+i\sqrt{\pi}\,d_3(1/2z^3b_0)^{5/2}+O[(1/2z^3b_0)^3] \tag{41}$$

式中d_1和d_3由b_0，b_1，b_2和b_3确定，经整理得

$$d_1=-z^2c_0(\varphi),\qquad d_3=z^6[3(y_0^2-1)^3\cos\varphi/(4y_0)]c_1(\varphi)$$
$$c_0(\varphi)=\left[(y_0^2-1)/(8y_0^2)\right](5y_0^2+1)$$
$$c_1(\varphi)=\left[5/(2^5\cdot 3^2y_0^5\cos\varphi)\right](7y_0^6+14y_0^4-4y_0^2+1) \tag{42}$$

于是，只取到d_3为止，得

$$\oint dWe^{2z^3f(W)}W=i\sqrt{\pi}\left[8y_0^{3/2}/(z^{11/2}3^{3/2}(y_0^2-1)^{9/2}(\cos\varphi)^{3/2}\right]\left[-c_0(\varphi)+c_1(\varphi)/z\right]$$

(38)式中含x_0的积分可写成$x_0Z(z)$，而$Z(z)$已由(19)式给出，于是得

$$Z_4(z)=(a_0/z^{5/2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\, e^{zf_1(\varphi)}f_0(\varphi)(Q_2(\varphi)/z^2+Q_3(\varphi)/z^3+Q_4(\varphi)/z^4) \tag{43}$$

式中
$$Q_2(\varphi)=1/(y_0^2-1)$$
$$Q_3(\varphi)=-4y_0c_0(\varphi)/\left[3(y_0^2-1)^3\cos\varphi\right]-a_1(\varphi)/(y_0^2-1)$$
$$Q_4(\varphi)=4y_0c_1(\varphi)/\left[3(y_0^2-1)^3\cos\varphi\right]-a_2(\varphi)/(y_0^2-1) \tag{44}$$

而a_0，$f_1(\varphi)$和$f_0(\varphi)$已由(18)式给出。应用本文的公式计算出$z\geqslant 2$时的$Z(z)$，$Z'(z)$，$Z''(z)$和$Z_4(z)$的数值如表1所示。

当$z\leqslant 2$时，可直接用级数展开法计算，取到z^{50}项已经足够。级数展开公式为

$$Z(z)=\sum_{j,k,l,n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}3^{j+k}z^{2j+4k+6l+3n}}{(j+2k+3l+n+2)!(k+2l+n+1)!j!k!l!n!} \tag{45}$$

$$Z_4(z)=\sum_{j,k,l,n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}3^{i+k}z^{2j+4k+6l+3n}}{(j+2k+3l+n+3)!(k+2l+n+2)!j!k!l!n!} \tag{46}$$

表1　4个基本SU(3)群积分的值

Tab.1 The values of SU(3) one-link integrals

z	Z(z)	Z′(z)/Z(z)	Z″(z)/Z(z)	$Z_4(z)/Z(z)$
2	105.354	4.06550	17.4436	0.0543912
3	8737.47	4.69106	22.4316	0.0285551
4	1.13512×10^{6}	5.01271	25.3702	0.0172796
5	1.89448×10^{8}	5.20779	27.2777	0.0115218
6	3.70948×10^{10}	5.33860	28.6098	0.00821409
7	8.11395×10^{12}	5.43236	29.5911	0.00614598
8	1.92514×10^{15}	5.50286	30.3432	0.00476910
9	4.86092×10^{17}	5.55779	30.9379	0.00380714
10	1.28922×10^{20}	5.60180	31.4198	0.00310897
11	3.55819×10^{22}	5.63784	31.8180	0.00258640
12	1.01491×10^{25}	5.66790	32.1526	0.00218518

$Z'(z)$和$Z''(z)$可用(45)式对z分别微商一次或二次得到。于是对任何z值都可分别用级数展开或定积分表示式计算出有关的SU(3)群积分的数值。

5 结 论

在用变分累积展开方法分析SU(3)群格点规范理论时，累积展开到二级的计算中碰到的SU(3)群积分都可用4个基本的SU(3)群积分$Z(z)$,$Z'(z)$,$Z''(z)$和$Z_4(z)$表示出来。当$z\geqslant2$时，这4个SU(3)群积分都可以用最陡下降法将它们表示成容易用数值计算求值的一元实变函数的定积分。当$z\leqslant2$时，可用级数展开法直接求值。我们的计算表明，当$z=2$时取到本文公式中写出的项所得结果与级数展开法取到z^{50}项，在5位有效数字以内相符。z愈大，最陡下降法给出愈精确的结果。在$z=10$，级数展开到z^{300}项与本文给出的定积分表示式计算的结果相符。这反过来又可以检验级数展开法中应取到多少项。本文的计算方法也可以推广到累积展开到更高级的项时碰到的SU(3)群积分。

参 考 文 献

〔1〕Guo Shuohong. *Commun in Theor. Phys.* (Beijing), 5 (1985), 613
〔2〕郭硕鸿等，中山大学学报（自然科学版），1984,4,48
〔3〕Kogut J, *Rev. Mod. Phys.*, 55 (1983), 775
〔4〕Creutz M, *In Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge Univ. Press., 1983
〔5〕Zheng Xite et al., *Nucl. Phys.*, B287. (1987), 171
〔6〕刘金明等，高能物理与核物理，12 (1988), 420
〔7〕Brower R et al., *Nucl. Phys.*, B190 FS3 (1981), 699
〔8〕Creutz M, *Rev. Mod. Phys.*, 50 (1978), 561
〔9〕Brower R et al., *Nucl. Phys.*, B180 FS2 (1981), 221
〔10〕Eriksson K E et al., *J. Math. Phys.*, 22 (1981), 2276
〔11〕刘金明等，中山大学学报（自然科学版）1989,2,28
〔12〕斯米尔诺夫（叶彦谦译），高等数学教程，3卷2分册，商务印书馆，1956，270

SU(3) One-link Integrals in 2nd Order Variational-cumulant Expansion

*Liu Jinming** *Gong Di*

Abstract

It is shown that SU(3) one-link integrals which arise in 2nd order variational-cumulant expansion in SU(3) lattice gauge theory can be calculated by using four fundamental SU(3) group integrals. The definite integral expressions of these four SU(3) group integrals in the weak coupling regions are obtained by steepest descent method. All these integrals can be numerically evaluated easily.

Keywords lattice gauge theory, SU(3) group, steepest descent method

* Department of Physics