中山大学学报(自然科学版)
第29卷 第4期 1990年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.29 No.4 1990

·研究简报·

SU(2)和SU(3)群比热的格点计算*

陈启洲 张忠安 郭硕鸿
(物理学系)

摘 要

本文用格点规范理论的累积展开方法，计算SU(2)和SU(3)群的比热值，给出与Monte Carlo模拟相容的结果。

关键词 格点规范理论，SU(2)和SU(3)群比热

1 基本理论

纯规范场系统的配分函数Z为

$$Z \equiv e^{-W} = \int [du] e^{S} \tag{1}$$

$$S = \frac{\beta}{2N_c} \sum_{p} Tr\,(U_p + U_p^{+}) \tag{2}$$

其中N_c为规范群的颜色数，对于SU(2)和SU(3)群N_c分别为2和3，$\beta = 2N_c/g^2$，g为裸耦合常数，W为系统的自由能，[du]为Haar测度，U是$SU(N_c)$群的元素，U_p是围成元格的U的乘积，变分方法是引入试探作用量$S_o = X\sum_{l} T_r\,(U_l + U_l^{+})$将$Z$转换成$Z_o$

$$Z_o = \int [du]\, e^{S_o} = \int [du] \exp X \sum_{l} T_r (U_l + U_l^{+}) = e^{-W_o} \tag{3}$$

$$Z = \int [du] e^{S} = \int [du]\, e^{S_o}\, e^{S-S_o} = Z_o \langle e^{S-S_o} \rangle_o \tag{4}$$

其中$\langle e^{S-S_o} \rangle_o = Z_o^{-1} \int [du]\, e^{S_o}\, e^{S-S_o}$

在平均场理论中，利用凸性定理$\langle e^{S-S_o} \rangle_o \geqslant e^{\langle S-S_o \rangle_o}$给出$W(\leqslant W_o - \langle S-S_o \rangle_o)$的上界，且由$W_{eff,1} = W_o - \langle S-S_o \rangle_o$的极小值条件

$$\frac{\partial W_{eff,1}}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial^2 W_{eff,1}}{\partial x^2} > 0 \tag{5}$$

定出变分参数x和β的关系式，对于时-空维数$d=4$时，SU(2)群的上述(5)式变为

本文1989年7月8日收到
* 中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

$$x-6\beta\left(\frac{I_2(x)}{I_1(x)}\right)^3=0 \tag{6}$$

$I_\nu(x)$为ν阶变形贝塞尔函数。（6）式有两组解：①$x=0$（β任意）的平庸解。此解的等效自由能$W^{(0)}_{eff,1}=0$。②$x\geqslant 6$（对应的$\beta\geqslant 2.25$）的非平庸解，当$x\simeq 6.0$，$\beta_c\simeq 2.25$时，$W_{eff,1}(6,2.25)\simeq 0.28$。人们采用$\beta_c\simeq 2.25$作为SU(2)群的一级相变点，虽然平均场理论选用$\beta_c\simeq 2.25$后给出系统比热$C=\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\langle T_\nu U_p\rangle$的峰值位置与Monte Carlo模拟结果一致[1]，但该点的自由能$W_{eff,1}(6,2.25)$并不是最小值（$>W_{eff,1}(0,2.25)$）。文献[2]用累积展开方法给出变分参数x应满足的方程

$$\frac{\delta}{\delta x}W_{eff,m}(\beta,x)=0 \tag{7}$$

$$W_{eff,m}(\beta,x)=W_o-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}k_n(\beta,x)=W_o-\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n!}\langle(S-S_o)^n\rangle_c \tag{8}$$

（7）式的非平庸解的起始点是$x\simeq 6.0$；$\beta_c\simeq 2.25$且$W_{eff,m}(2.25,6)<W_{eff,m}(2.25,0)$，即非平庸解是自由能为最小值，解释了平均场理论选取$\beta_c=2.25$是正确的。在下面的计算中，我们接受平均场理论给出的β_c值作为非平庸解的最低点。

2 SU(2)的比热

纯规范场系统的比热c为

$$c=-\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta}\langle T_r U_p\rangle=(\beta^2/N_p)(\partial^2\ln z/\partial\beta^2) \tag{9}$$

利用文献[3]的结果得到SU(2)群的比热值为

$$c=\beta^2\Big\{\frac{1}{4}[1+3(I_3/I_1)^4+20(1+3I_3/I_1)(I_2/I_1)^6-84(I_2/I_1)^8]$$
$$+\frac{1}{6}[E_1+63E_2+1150E_3+60E_4-2064E_5+80E_6+804E_7+32E_8$$
$$+12(E_{10}-E_9)+504(E_{11}-E_{12})+60(E_{14}-E_{13})+360(E_{14}-E_{15})]\Big\} \tag{10}$$

其中 $E_1=3\beta[(I_4/I_1)^2+(I_2/I_1)^4]$，　$E_2=\frac{2}{3}\beta(I_2/I_1)^4[1+3(I_3/I_1)^4]$，

$E_3=6\beta(I_2/I_1)^{12}$，

$E_4=\frac{3}{2}\beta(I_2/I_1)^3[(I_2/I_1)+(I_3/I_1)^3(I_2/I_1+2I_4/I_1)]$，

$E_5=\frac{3}{2}\beta(I_2/I_1)^{10}[1+I_3/I_1]$，　$E_6=3\beta(I_2/I_1)^9[I_2/I_1+I_4/I_1]$，

$E_7=\frac{3}{8}\beta(I_2/I_1)^8[1+3I_3/I_1]^2$，

$E_8=\frac{3}{8}\beta(I_2/I_1)^6[1+9(I_3/I_1)^2+6(I_3/I_1)^3]$，

$$E_9=\frac{1}{2}x[I_2/I_1+(I_3/I_1)^3(I_2/I_1+2I_4/I_1)],$$

$$E_{10}=\frac{1}{2}x(I_2/I_1)[1+3(I_3/I_1)^4],\qquad E_{11}=\frac{1}{2}x(I_2/I_1)^7[1+3I_3/I_1],$$

$$E_{12}=2x(I_2/I_1)^9,\qquad E_{13}=x(I_2/I_1)^8[I_2/I_1+I_4/I_1],$$

$$E_{14}=\frac{1}{2}x(I_2/I_1)^7[1+3I_3/I_1],\qquad E_{15}=\frac{1}{8}x(I_2/I_1)^5[1+3I_3/I_1]^2.$$

图 1 给出Z的二级和三级累积展开结果。由图 1 可见，若取$\beta_c\simeq2.25$作为非平庸解的最低值，则比热峰的位置与Monte Carlo (MC)模拟结果相符。如果按文献[3]的取值$\beta_c\simeq2.82$则与MC结果相差较大，这些初步计算支持文献[2]的结论。图 1 表明$\beta>2.25$时累积展开和MC结果相差较大，可能还要计算较高级修正才能使二者接近。

3　SU(3)的比热

对于SU(3)群，由于$N_c=3$比SU(2)群多出一个颜色指标，使计算大为繁琐。我们计算Z的表示式只取二级近似，而确定变分参数x与β关系的方程式为

$$x-\beta\left(\frac{1}{6}\partial\ln z_o/\partial x\right)^3=0 \tag{11}$$

其中z_o是SU(3)群的单键积分[4]。上式也有$x=0$的平庸解和$x\neq0$的非平庸解，后者的最低值为$x=2.6$，$\beta_c\simeq6.18$，像SU(2)一样取此解作为比热峰的位置，则与MC模拟结果相符。如果按照文献[3]的方法选取非平庸解的最低值，则$\beta_c\simeq7.8$，与MC结果相差很大。图 2 给出累积展开与MC模拟[5]的结果，二者的峰值高低相差较大，可能是累积展开的阶数不够高造成的。

本文用二级累积展开计算了SU(2)群和SU(3)群的比热，由于比热峰处在从强耦合到弱耦合的过渡区，在此区内累积展开有较大的误差，因此不能期望计算结果与Monte Carlo结果能很好地相符，特别是在累积展开中从平庸解到非平庸的过渡点β_c，如果取一级变分结果，则此点与MC比热峰位置偏离较大，取高级变分结果或用固定规范方法[2]，可以使结果有较大的改善。

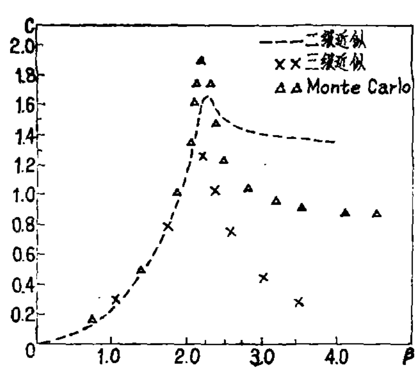

图 1　SU(2)群比热
Fig.1　The specific heats of SU(2)

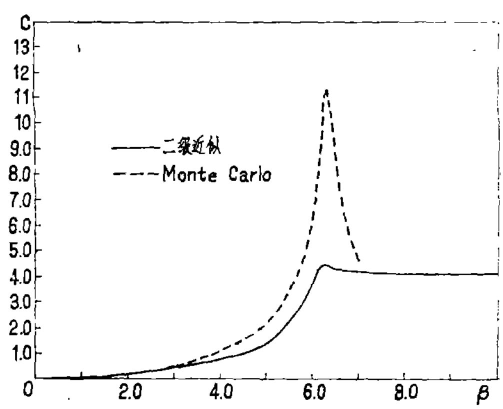

图 2　SU(3)群比热
Fig.2　The specific heats of SU(3)

参 考 文 献

〔1〕 Lautrup B et al., *Phys Rev Lett*, 45(1980), 1755
〔2〕 Zheng Xi-Te et al., *Nucl Phys.*, **B287** (1987), 171
〔3〕 吴济民等，高能物理与核物理，10(1986)，297
〔4〕 Lang C B et al., *Phys. Lett*, **100B**(1981), 29
〔5〕 Edgar R C et al., *J.Phys.*, **G7**(1981), L85

The Calculations of the Specific Heats of SU(2) and SU(3) Groups in Lattice Gauge Theory

Chen Qizhou Chang Zhongan Guo Shuohong*

Abstract

The specific heats of SU(2) and SU(3) groups are calculated by using cumulant expansion method and the results are Consistant with that obtained by Monte Carlo method

Keywords lattice gauge theory, specific heats of SU(2) and SU(3) groups

* Department of Physics