

· 研究简报 ·

# 多复变情形的 Hurwitz 定理\*

王则柯 高堂安

(计算机科学系)

## 摘 要

用同伦方法将Hurwitz定理推广到多复变的情形,并且放宽了边界条件.

**关键词** Hurwitz定理,多复变,同伦方法

## 1 主要结果

设 $\mathbf{C}^n$ 是复 $n$ 维空间.本文的主要结果是:

**定理** 设 $D, E \subset \mathbf{C}^n$ 是有界开集,  $\bar{D} \subset E$ . 设 $f, f_k: E \rightarrow \mathbf{C}^n, k = 1, 2, 3, \dots$  都是有孤立零点的解析映射,并且在 $D$ 的边界 $\partial D$ 上 $f(z)$ 恒不为零,  $\{f_k\}$ 在 $\bar{D}$ 上一致收敛到 $f$ . 那末,存在正整数 $K$ 使当 $k \geq K$ 时,按重数计 $f_k$ 与 $f$ 在 $D$ 内的零点数目相同.

当 $n = 1$ 并且 $\partial D$ 是可求长简单闭曲线时,这就是单复变中经典的Hurwitz定理<sup>[1]</sup>.

## 2 三个引理

设 $V \subset \mathbf{R}^m$ 是开集,  $H: V \rightarrow \mathbf{R}^p$ 是光滑映射.  $y \in \mathbf{R}^p$ 是 $H$ 的正则值指的是对所有 $x \in H^{-1}(y)$   $\text{Range } DH(x) = \mathbf{R}^p$ , 其中 $DH(x)$ 是 $H$ 在 $x$ 的 $m \times p$ 偏导数矩阵. 熟知,当 $y \in \mathbf{R}^p$ 是 $H$ 的正则值时,  $H^{-1}(y)$ 是 $V$ 中的一个光滑流形,其维数为 $m - p$ <sup>[2]</sup>.

**引理 1**<sup>[3,4]</sup> 设 $W \subset \mathbf{R}^q, V \subset \mathbf{R}^m$ 是开集,并且 $\phi: W \times V \rightarrow \mathbf{R}^p$ 是光滑映射,  $m \geq p$ . 若 $0 \in \mathbf{R}^p$ 是 $\phi$ 的正则值,则对几乎每个 $a \in W, 0 \in \mathbf{R}^p$ 是限制映射 $\phi(a, \cdot): V \rightarrow \mathbf{R}^p$ 的正则值.

**引理 2**<sup>[5]</sup> 设 $T: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$ 解析,则按照 $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ 与 $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbf{R}^{2n}$  (其中 $z_i = x_i + iy_i, x_i, y_i \in \mathbf{R}$ )的对应视 $T$ 为实映射 $T: \mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2n}$ 时,  $T$ 的实的 Jacob 行列式处处非负.

**引理 3**<sup>[6]</sup> 设 $H: [0, 1] \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ 为光滑映射. 若 $0 \in \mathbf{R}^m$ 是 $H$ 的正则值,则对 $H^{-1}(0)$ 的任一连通分支 $(t(s), x(s))$ ,其中 $s$ 为弧长参数,我们有:

对一切 $s$ ,或恒成立

$$\text{sgn } \frac{dt(s)}{ds} = \text{sgn } \det \frac{\partial H}{\partial x} (t(s), x(s)),$$

\* 本文1989年3月1日收到

• 高等学校博士学科点专项科研基金和国家自然科学基金资助项目

或恒成立

$$\operatorname{sgn} \frac{dt(s)}{ds} = - \operatorname{sgn} \det \frac{\partial H}{\partial x} (t(s), x(s)).$$

### 3 定理的证明

因  $f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \partial D$ , 并且  $\bar{D}$  和  $\partial D$  都紧, 首先有  $e = \min \{ \|f(z)\| : z \in \partial D \} > 0$ , 于是易得正整数  $K$  使当  $k \geq K$  时恒有  $f_k(z) \neq 0 \quad \forall z \in \partial D$  和  $\|f_k(z) - f(z)\| < e/2 \quad \forall z \in \bar{D}$ . 另一方面,  $f$  在  $D$  内按重数计的零点数目有限, 记为  $d$ .

按照  $\mathcal{F}(c, z) = f(z) + c$

定义  $\mathcal{F}: \mathbf{C}^n \times E \rightarrow \mathbf{C}^n$ . 记恒同矩阵为  $I$ .  $\partial \mathcal{F}(c, z)/\partial c = I$  说明,  $0 \in \mathbf{C}^n$  是  $\mathcal{F}$  的正则值. 据引理 1, 对几乎每个  $c \in \mathbf{C}^n$ ,  $0$  是  $f(z) + c$  的正则值. 特别地, 对几乎每个模足够小的  $c \in \mathbf{C}^n$ ,  $f(z) + c$  在  $D$  内正好有  $d$  个不同的零点, 它们都是单零点.

对任何  $k \geq K$  和  $r \in (0, 1)$ , 按照

$$\mathcal{H}(c, t, z) = (1-t)(f(z) + c) + tf_k(z)$$

定义  $\mathcal{H}: \mathbf{C}^n \times [0, 1-r] \times E \rightarrow \mathbf{C}^n$ . 因

$$\partial \mathcal{H}(c, t, z)/\partial c = (1-t)I$$

而  $1-t \neq 0$ ,  $0 \in \mathbf{C}^n$  是  $\mathcal{H}$  的正则值, 故据引理 1, 对几乎每个  $c \in \mathbf{C}^n$ ,  $0 \in \mathbf{C}^n$  是按  $H(t, z) = \mathcal{H}(c, t, z)$  定义的  $H: [0, 1-r] \times E \rightarrow \mathbf{C}^n$  的正则值.

选定一个  $c \in \mathbf{C}^n$  使满足上述两个条件, 则因  $0$  是  $H$  的正则值,  $H^{-1}(0)$  是光滑流形, 其维数为实  $(1+2n) - 2n = 1$  维. 因为对每个固定的  $t \in [0, 1-r]$ ,  $H(t, z)$  是  $z$  的解析映射, 故据引理 2,

$$\det \frac{\partial H(t, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{\partial (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}$$

处处非负, 再据引理 3, 对  $H^{-1}(0)$  的每个连通分支  $(t(s), x_1(s), y_1(s), \dots, x_n(s), y_n(s))$ ,  $t(s)$  是  $s$  的单调函数, 所以,  $H^{-1}(0)$  的每个分支都是对  $t$  单调的简单光滑曲线.

注意  $(t^*, z^*) \in H^{-1}(0) \cap ([0, 1-r] \times \partial D)$  等价于

$$(1-t^*)(f(z^*) + c) + t^*f_k(z^*) = f(z^*) + (1-t^*)c + t^*(f_k(z^*) - f(z^*)) = 0$$

和  $(t^*, z^*) \in [0, 1-r] \times \partial D$ ,

与  $\|f_k(z) - f(z)\| < \|f(z)\|/2 \quad \forall z \in \partial D$  和  $\|c\|$  很小矛盾,

所以  $H^{-1}(0) \cap ([0, 1-r] \times \partial D) = \emptyset$ .

综上所述,  $H^{-1}(0)$  的每个分支都是  $t$  的单调曲线且不和  $[0, 1-r] \times \partial D$  相交, 故每个分支都一端在  $\{0\} \times D$  而另一端在  $\{1-r\} \times D$ . 所以,  $H(1-r, z)$  与  $H(0, z) = f(z) + c$  在  $D$  零点数目相同, 并且都是单零点.

最后令  $r \rightarrow 0$ , 并注意  $H(1, z) = f_k(z)$ , 就得到定理结果.

### 参 考 文 献

- [1] Conway J B, *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1973
- [2] Guillemin V et al., *Differential Topology*, prentice-Hall, New Jersey, 1974
- [3] Abraham R et al., *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York, 1967
- [4] Chow S N et al., *Mathematics of Computation*, 32 (1978), 887~899
- [5] Chow S N et al., in *Springer Lecture Notes in Math.*, 730 (1979)
- [6] Garcia C B et al., *Mathematics of Operations Research*, 3 (1978), 282~289

## Hurwitz Theorem for Several Complex Variables

Wang Zeke Gao Tangan\*

### Abstract

Hurwitz Theorem for the case of several complex variables is presented as a result of homotopy methods. The boundary condition is considerably relaxed as well.

**Keywords** Hurwitz theorem, several complex variables, homotopy methods

---

\*Department of Computer Science