中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第2期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 №.2
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

·研究简报·

关于一个Open问题的一些结果

龙冬阳
（数学系）

摘　要

给出了Laffey问题(E3275)的部分结果，解决了有限环的情况。

关键词　映射，同态，交换环

Thomas J. Laffey 最近提出这样一个问题（见〔1〕E3275）：

a）假设R为一个结合环，且对于R中任意元x存在y使得$x=y^2$。如果映射$f:R\to R$，$x\to x^2$是一个环的自同态，那么R是一个可换环。

b）假设R为一个结合环。如果存在R到R上的一个映射f使得对于所有$x,y\in R$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(xy)=(xy)^2$，那么R是否一定是可换环？

我们先证明a)。事实上，可以证明更一般的结论。

定理1　设R是一个结合环，且R中任意元都可以表为两个元之积，如果存在R到R上的映射f使得对于所有$x,y\in R$，$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(xy)=(xy)^2$，那么R是一个可换环。

证明　先说明对于每一$x\in R$,有$f(x)=x^2$.事实上,由题设,对$x\in R$存在$x_1,y_1\in R$使得$x=x_1y_1$,于是$f(x)=f(x_1y_1)=(x_1y_1)^2=x^2$.因此对于任意$x,y\in R$,有$f(x+y)=(x+y)^2$。又$f(x+y)=f(x)+f(y)=x^2+y^2$，由此得$xy+yx=0$。下面说明$xy+xy=0$.因$f$是一个满射，于是存在$a\in R$使得$f(a)=xy$。又据题设存在$x_2,y_2\in R$使得$a=x_2y_2$。由$f$是加群同态，易知$f(-a)=-f(a)$。于是$xy=f(a)=f(x_2y_2)=(x_2y_2)^2=(-x_2y_2)^2=f(-x_2y_2)=f(-a)=-f(a)=-xy$,即$xy+xy=0$。由$xy+yx=0$，$xy+xy=0$，则$xy=yx$。

易验证，假设环R满足a)中的条件，则R必满足定理1中的条件，故由定理1即可推得a)成立。

下面证明，如果R是有限环，则b)有肯定的回答。

定理2　设R是一个适合结合律的有限环，如果存在R到R上的映射f使得对于所有$x,y\in R$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$,$f(xy)=(xy)^2$，那么R是一个可换环。

证明　因为f是从有限环R到R上的映射，故易推得f是一个双射，于是f是一个单射，因此我们仅需证明对于任意$x,y\in R$，$f(xy)=f(yx)$，即$(xy)^2=(yx)^2$。设a,b,c,d是

本文1989年1月10日收到

R中任意四个元，先说明$abac=-acab$，$baca=-caba$。因为$f[a(b+c)]=[a(b+c)]^2=(ab+ac)^2$，$f[a(b+c)]=f(ab+ac)=f(ab)+f(ac)=(ab)^2+(ac)^2$，所以$(ab+ac)^2=(ab)^2+(ac)^2$，于是$abac=-acab$。同理可得$baca=-caba$。然后利用$abac=-acab$，$baca=-caba$可推导$abcd=cdab$。因为$f(abcd)=(abcd)^2$，$f(cdab)=(cdab)^2=cdabcdab=-cbcdadab$（因为$dabcda=-bcdada$）$=adcbcdab$（因为$cbcdad=-adcbcd$）$=-abcdcdab$（因为$dcbc=-bcdc$）$=abcd\,abcd$（因为$cdcdab=-cdabcd$）$=(abcd)^2=f(abcd)$由$f$是单射，故$abcd=cdab$。对于任意$x,y\in R$取$a=y,b=xy,c=x,d=yxyx$，则$abcd=yxyxyxyx=(yx)^4$，$cdab=xyxyxyxy=(xy)^4$，故由$abcd=cdab$，则$(yx)^4=(xy)^4$，即$f[(yx)^2]=(yx)^4=(xy)^4=f[(xy)^2]$，又由$f$为单射，则$(xy)^2=(yx)^2$。

从定理2的证明过程，可推得

定理3 设R是一个结合环，如果存在一个R到R的单射f，使得对于所有$x,y\in R$都有$f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(xy)=(xy)^2$，那么R是一个可换环。

参 考 文 献

[1] Thomas J Laffey, *The American Mathematics Monthly*, 95(1988), 6, 555

Some Results on an Open Problem

*Long Dongyang**

Abstract

We give a positive answer to the Laffey problem in finite rings.

Keywords function, homomorphism, commutative rings

* Department of Mathematics