

守恒双曲方程一类二阶精度格式*

徐树荣

黄友书

(中山大学计算机科学系)

(加拿大Alberta大学)

摘 要

将双曲守恒律的一阶精度E格式推广为二阶精度TVD格式, 特别得到了二阶精度E-O (Engquist-Osher)格式, 给出理论分析和数值算例。

关键词 守恒律, 差分格式, E格式, 总变差减少(TVD)

1 一阶精度E格式

考虑纯量守恒律

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_t + a(u)u_x = 0, & t > 0, x \in R \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

这里, $a(u) = \frac{df(u)}{du}$, 逼近于(1)的守恒差分格式是

$$u_j^* = u_j - \lambda \left(\bar{f}_{j+\frac{1}{2}} + \bar{f}_{j-\frac{1}{2}} \right) \quad (2)$$

此处, $u_j^* = u_j^{n+1}$, $u_j = u_j^n$, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} = -\frac{\tau}{h}$, $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}} = \bar{f}(u_{j-m+1}, u_{j-m+2}, \dots, u_{j+m})$ 是相容 Lipschitz 连续的数值通量函数。

如果 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 满足

$$\text{sgn}(u_{j+1} - u_j) (\bar{f}_{j+\frac{1}{2}} - f(u)) \leq 0, \quad \forall u \in (\min(u_j, u_{j+1}), \max(u_j, u_{j+1})) \quad (3)$$

则(2)称为E格式。这时记 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 为 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E$ 。对三点($m=1$)E格式, 定义局部 CFL 数

$$\begin{cases} E_{j+\frac{1}{2}}^+ = -(\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - f_{j+1}) / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = -(\Delta_{j+\frac{1}{2}} f)^+ / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \\ E_{j+\frac{1}{2}}^- = (\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - f_j) / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = (\Delta_{j+\frac{1}{2}} f)^- / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \end{cases} \quad (4)$$

这里, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} u = u_{j+1} - u_j$ 。显然,

$$E_{j+\frac{1}{2}}^+ \geq 0, \quad E_{j+\frac{1}{2}}^- \leq 0, \quad E_{j+\frac{1}{2}}^+ + E_{j+\frac{1}{2}}^- = \Delta_{j+\frac{1}{2}} f / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = a_{j+\frac{1}{2}} \quad (5)$$

令
$$E_{j+\frac{1}{2}} = E_{j+\frac{1}{2}}^+ - E_{j+\frac{1}{2}}^- \quad \text{显然 } E_{j+\frac{1}{2}} \geq 0, \text{ 且 } E_{j+\frac{1}{2}} \geq |a_{j+\frac{1}{2}}| \quad (6)$$

本文1988年6月30日收到

* 本项研究得到加拿大自然科学和工程研究委员会基金UO375号资助。部分内容曾在1988年第五届BAIL V国际会议上报告

利用 (6), E 格式可记为

$$u_j^* = u_j - \lambda E_{j+\frac{1}{2}}^- \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \lambda E_{j-\frac{1}{2}}^+ \Delta_{j-\frac{1}{2}} u = u_j - \lambda (\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^E) \quad (7)$$

这里,
$$\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E = \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1}) - \frac{1}{2} E_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \quad (8)$$

从 [1] 知, 在 $\lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$ 时, E-格式 (7) 是 TVD (总变差数少) 格式。在以下讨论中, 我们均假定

$$\lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq \lambda \max_{\zeta} |a(\zeta)| \leq 1 \quad (9)$$

E-O (Enquist - Osher) 格式是 E 格式, 对 E-O 格式, 有

$$E_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u} \int_{u_{j+1}}^{u_{j+1}^+} |a(s)| ds \leq \max_s |a(s)| \quad (10)$$

并且在 (9) 限制下, 它是 TVD 的。

2 二阶精度 E-格式

E 格式只有一阶精度, 基于 [1], 我们将它推广为二阶格式并证明在某些 CFL 类条件下是 TVD 格式, 其格式是

$$u_j^* = u_j - \lambda (\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^M) \quad (11)a$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M &= \frac{1}{2} (f_j^M + f_{j+1}^M - E_{j+\frac{1}{2}}^M \Delta_{j+\frac{1}{2}} u) \\ &= \frac{1}{2} (f_j + f_{j+1} - E_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u) + \frac{1}{2} (g_j + g_{j+1} - |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \Delta_{j-\frac{1}{2}} u) \end{aligned} \quad (11)b$$

$$E_{j+\frac{1}{2}}^M = E_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}|, \quad f_j^M = f_j + g_j \quad (11)c$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (g_{j+1} - g_j) / \Delta_{j+\frac{1}{2}} u, & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \neq 0 \\ 0 & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = 0 \end{cases} \quad (11)d$$

$$\begin{aligned} g_j &= g(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}) \\ &= s_{j+\frac{1}{2}} \max \left[0, \min \left(\sigma_{j+\frac{1}{2}} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|, s_{j+\frac{1}{2}} \sigma_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right) \right] \end{aligned} \quad (11)e$$

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (E_{j+\frac{1}{2}} - \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^2), \quad s_{j+\frac{1}{2}} = \text{sgn}(|\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|) \quad (11)f$$

注意, 由于 $E_{j+\frac{1}{2}}$ 一般并不能表示为 $O(\lambda a_{j+\frac{1}{2}})$, 所以 (11) 并未包含在 [1] 的格式中。

引理 1 定义在 (11) 中的 g_j 和 $\gamma_{j+\frac{1}{2}}$, 在 CFL 类条件 $\lambda \max_{\zeta} |a(\zeta)| \leq 1$ 的限制下,

满足

$$g_j + g_{j+1} = 2\sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u + O(h^2) \quad (12)$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = g_{j+1} - g_j = O(h^2) \quad (13)$$

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \leq \sigma_{j+\frac{1}{2}} \quad (14)$$

证明 首先假定 $\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} \geq 0$, 利用 $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$

和
$$g_j = \begin{cases} s_{j+\frac{1}{2}} \min(\sigma_{j+\frac{1}{2}} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|, \sigma_{j-\frac{1}{2}} |\Delta_{j-\frac{1}{2}} u|), & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u > 0, \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

可得,
$$g_j = \sigma_{j \pm \frac{1}{2}} \Delta_{j \pm \frac{1}{2}} u + \frac{1}{2} \left[\mp \left(\sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \sigma_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right) - s_{j+\frac{1}{2}} \left| \sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \sigma_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right| \right]$$

从(11)f知, 如果 u 是光滑函数, $\sigma_{j+\frac{1}{2}}$ 是 u_j, u_{j+1} 的 Lipshitz 连续函数, 则,

$\sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - \sigma_{j-\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u = O(h^2)$, 这意味着,

$$g_j = \sigma_{j \pm \frac{1}{2}} \Delta_{j \pm \frac{1}{2}} u + O(h^2) \tag{15}$$

如果, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u < 0$, (此时 $g_j = 0$), 易知同样的表达式(15)也成立, 因此, 有

$$g_j = \sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u + O(h^2), \quad g_{j+1} = \sigma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u + O(h^2)$$

即得(12)和(13).

从(11)e可知 g_j 和 g_{j+1} 不可能有不同符号, 所以

$$|g_{j+1} - g_j| \leq \max(|g_j|, |g_{j+1}|) \leq \max[\min(\sigma_{j-\frac{1}{2}} |\Delta_{j-\frac{1}{2}} u|, \sigma_{j-\frac{1}{2}} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|) \min(\sigma_{j+\frac{1}{2}} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|, \sigma_{j+\frac{3}{2}} |\Delta_{j+\frac{3}{2}} u|)] \leq \sigma_{j+\frac{1}{2}} |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u|$$

因此, $|\gamma_{j+\frac{1}{2}}| = |g_{j+1} - g_j| / |\Delta_{j+\frac{1}{2}} u| \leq \sigma_{j+\frac{1}{2}}$. 引理1得证.

定理1 由(11)定义的差分格式在 CFL 类限制 $\lambda \max(E_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}|) \leq 1$

或 $\lambda \max |a(\zeta)| \leq \frac{2}{3}$ 下是 TVD 格式.

证明 从(11)b有

$$\begin{aligned} f_{j+\frac{1}{2}}^M &= f_j + g_j - \frac{1}{2} (E_{j+\frac{1}{2}}^M - a_{j+\frac{1}{2}} - \gamma_{j+\frac{1}{2}}) \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \\ &= f_{j+1} + g_{j+1} - \frac{1}{2} (E_{j+\frac{1}{2}}^M + a_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}}) \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \end{aligned}$$

所以(11)a可记为

$$u_j^* = u_j + C_{j+\frac{1}{2}}^+ \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - C_{j-\frac{1}{2}}^- \Delta_{j-\frac{1}{2}} u$$

这里
$$C_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\lambda}{2} [E_{j+\frac{1}{2}}^M - (a_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}})]$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{\lambda}{2} [E_{j+\frac{1}{2}}^M + (a_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}})]$$

因此,
$$C_{j+\frac{1}{2}}^+ + C_{j+\frac{1}{2}}^- = \lambda E_{j+\frac{1}{2}}^M = \lambda (E_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}|) \leq \frac{3}{2} \lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$$

另一方面,
$$C_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\lambda}{2} (E_{j+\frac{1}{2}} - a_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| - \gamma_{j+\frac{1}{2}})$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{\lambda}{2} \left(E_{j+\frac{1}{2}} + a_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \right)$$

由于 $E_{j+\frac{1}{2}} \geq |a_{j+\frac{1}{2}}|$, 所以 $C_{j+\frac{1}{2}}^+ \geq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^- \geq 0$.

根据 [1], 可知格式(11)在定理条件下是 TVD 格式.

定理 2 由(11)a—(11)b定义的格式是二阶精度格式.

证明
$$\bar{f}_j^M = \frac{1}{2} \left(f_j + f_{j+1} - E_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \right) + \frac{1}{2} \left(g_j + g_{j+1} - |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \right),$$

$$\frac{1}{2} \left(f_j + f_{j+1} \right) = f_{j+\frac{1}{2}} + O(h^2),$$

从引理 1, 有

$$g_j + g_{j+1} = \left(E_{j+\frac{1}{2}} - \lambda a_{j+\frac{1}{2}}^2 \right) \Delta_{j+\frac{1}{2}} u + O(h^2),$$

$$|\gamma_{j+\frac{1}{2}} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u| = O(h^2),$$

因此

$$\lambda \bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M = \left(\lambda f - h \frac{\lambda^2}{2} a^2 u_x \right)_{j+\frac{1}{2}} + O(h^2)$$

故
$$\lambda \left(\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^M \right) = \left[\tau f_x - \frac{\tau^2}{2} (a^2 u_x)_x \right]_j^n + O(h^3)$$

这里已假定 $O(h^2)$ 至少 Lipschitz 连续, 于是有

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \left[\tau f_x - \frac{1}{2} \tau^2 (a^2 u_x)_x \right]_j^n + O(h^3)$$

因此, 格式(11)是二阶精度的.

3 隐式 E 格式

考虑单参数族守恒格式

$$u_j^{n+1} + \lambda \theta \left[\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E \right]^{n+1} = u_j^n - \lambda (1-\theta) \left[\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^E \right]^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (16)$$

这里 $[]^{n+1}, []^n$ 分别表括号内函数在 $(n+1)$ 层和 n 层取值.

定理 3 如果 CFL 类条件

$$\lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{1-\theta} \quad (17)$$

成立, 则格式(16)是 TVD 格式.

证明 令
$$C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1} = \frac{\theta \lambda \left[\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - f_j \right]^{n+1}}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u^{n+1}}, \quad C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n+1} = -\theta \lambda \frac{\left[f_j - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^E \right]^{n+1}}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} u^{n+1}},$$

$$C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} = -(1-\theta) \lambda \frac{\left[\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^E - f_j \right]^n}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u^n}, \quad C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n} = (1-\theta) \lambda \frac{\left[f_j - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}}^E \right]^n}{\Delta_{j-\frac{1}{2}} u^n}.$$

于是(16)可记为

$$u_j^{n+1} - C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u^{n+1} - C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n+1} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u^{n+1} = u_j^n + C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u^n - C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u^n$$

由于 $C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} + C_{j+\frac{1}{2}}^{-,n} = (1-\theta)\lambda(E_{j+\frac{1}{2}}^+ - E_{j+\frac{1}{2}}^-)^n = (1-\theta)\lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq 1$ (18)

且 $C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1} \leq 0, C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n+1} \leq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} \geq 0, C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n} \geq 0,$

根据[2], 格式(16)是TVD格式, 定理得证.

推论 1 显式向前Euler格式(2), (8)((16)中 $\theta=0$)在条件

$$\lambda E_{j+\frac{1}{2}} \leq 1 \tag{19}$$

的限制下是TVD格式.

推论 2 隐式向后Euler格式((16)中 $\theta=1$)

$$u_j^{n+1} + \lambda \left[\bar{f}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{f}_{j-\frac{1}{2}} \right]^{n+1} = u_j^n \tag{20}$$

是无条件TVD格式.

推论 3 一阶显式E-O格式((16), (8), (10), $\theta=0$)在条件(9)限制下是TVD格式. 一阶隐式E-O格式((16), (8), (10), $0 < \theta < 1$)在条件

$$\sup_{\zeta} (\lambda |a(\zeta)|) \leq \frac{1}{1-\theta} \tag{21}$$

的限制下是TVD的, 全隐式E-O格式((16), $\theta=1$, (8)(10))是无条件TVD格式.

推论 4 Godunov格式是E格式, 其TVD条件同E-O格式.

如果在(16)中的 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 用(11)_b中的 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M$ 代替, 有类似的结果.

定理 3 格式(16)带有数值通量(11)_b在条件

$$\lambda \max \left(E_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \right) \leq \frac{1}{1-\theta}, \text{ 或 } \lambda \max_{\zeta} |a(\zeta)| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{1-\theta}$$

限制下是TVD和二阶精度格式.

证明 易知, 在(16)中用 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}^M$ 代 $\bar{f}_{j+\frac{1}{2}}$ 后可记为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} + \theta \left(C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - C_{j-\frac{1}{2}}^{-,n+1} \Delta_{j-\frac{1}{2}} u \right) \\ = u_j^n - (1-\theta) \left(C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u - C_{j+\frac{1}{2}}^{-,n} \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \right) \end{aligned}$$

这里, $C_{j+\frac{1}{2}}^+ = \frac{\lambda}{2} \left[-E_{j+\frac{1}{2}}^M + \left(a_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \right) \right]$
 $= \frac{\lambda}{2} \left[-E_{j+\frac{1}{2}} + a_{j+\frac{1}{2}} - |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \right],$
 $C_{j+\frac{1}{2}}^- = \frac{-\lambda}{2} \left[E_{j+\frac{1}{2}}^M + \left(a_{j+\frac{1}{2}} + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \right) \right]$
 $= \frac{-\lambda}{2} \left[E_{j+\frac{1}{2}} + a_{j+\frac{1}{2}} + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| + \gamma_{j+\frac{1}{2}} \right]$

由于 $E_{j+\frac{1}{2}} \geq a_{j+\frac{1}{2}}, E_{j+\frac{1}{2}} > 0,$ 所以 $C_{j+\frac{1}{2}}^+ \leq 0, C_{j+\frac{1}{2}}^- \leq 0,$

因此 $\theta C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n+1} \leq 0$, $\theta C_{j+\frac{1}{2}}^{-,n+1} \leq 0$, $-(1-\theta) C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} \geq 0$, $-(1-\theta) C_{j+\frac{1}{2}}^{-,n} \geq 0$.

$$\begin{aligned} \text{且 } -(1-\theta) \left(C_{j+\frac{1}{2}}^{+,n} + C_{j+\frac{1}{2}}^{-,n} \right) &= \lambda(1-\theta) E_{j+\frac{1}{2}}^M = \lambda(1-\theta) \left(E_{j+\frac{1}{2}}^+ + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \right) \\ &\leq \lambda(1-\theta) \frac{3}{2} E_{j+\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{2} (1-\theta) \max |a(\zeta)| \cdot \lambda \leq 1 \end{aligned}$$

根据[2]可知格式(16), (11)_b是TVD格式. 二阶精度可类似于定理2的证明, 定理3得证.

4 对方程组的推广

这里只描述将纯量E-O格式推广到方程组, 使得到的格式对“局部冻结”的常系数方程组是TVD格式.

考虑守恒律组

$$U_t + F(U)_x = U_t + A(U)U_x = 0, \quad U(x, 0) = U_0(x), \quad (22)$$

这里 $U, F(U) \in R^m, A(U) = \partial F(U) / \partial U$ 是 $m \times m$ Jacobi 矩阵. 假定 $A(U)$ 有实特征值 $a^k(U)$ 和完备右特征向量集 $R^k(U), (k=1, \dots, m)$. 令 $R = (R^1, R^2, \dots, R^m)$, 则 R^{-1} 存在, 且 $R^{-1}(U) = L$ 的行构成 $A(U)$ 的左特征向量集. 有

$$LAR = \text{diag}(a^1, a^2, \dots, a^m) = \Lambda$$

定义特征变量 $W = LU$ 在常系数情形, (22)可记为

$$W_t + \Lambda W_x = 0, \quad W(x, 0) = LU_0$$

上式的分量形式是如下的 m 个常系数方程

$$W_t^k + a^k W_x^k = 0, \quad W^k(x, 0) = L^k U_0, \quad k=1, 2, \dots, m \quad (23)$$

对(23)应用前述格式, 这就提示推广纯量格式到方程组的一种自然方法.

令 $U_{j+\frac{1}{2}} = V(U_j, U_{j+1})$ 表示 U_j, U_{j+1} 的某种平均, 这里 $V(a, b) = V(b, a)$,

$V(b, b) = b$. 令 $a_{j+\frac{1}{2}}^k, R_{j+\frac{1}{2}}^k, L_{j+\frac{1}{2}}^k$ 表与 $A(U_{j+\frac{1}{2}})$ 有关的量, 记

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}} U = \sum_{k=1}^m a_{j+\frac{1}{2}}^k R_{j+\frac{1}{2}}^k, \quad a_{j+\frac{1}{2}}^k = L_{j+\frac{1}{2}}^k \Delta_{j+\frac{1}{2}} U$$

我们构造如下差分格式

$$U_j^{n+1} + \theta \lambda \left(\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^M - \bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^M \right)^{n+1} = U_j^n - (1-\theta) \lambda \left(\bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^M - \bar{F}_{j-\frac{1}{2}}^M \right)^n \quad (24)a$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{j+\frac{1}{2}}^M &= \frac{1}{2} \left[F_j + F_{j+1} - \int_{U_j}^{U_{j+1}} |A(U)| dU \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left[g_j^k + g_{j+1}^k - a_{j+\frac{1}{2}}^k |\gamma_{j+\frac{1}{2}}| \right] R_{j+\frac{1}{2}}^k \end{aligned} \quad (24)b$$

$$g_j^k = s_{j+\frac{1}{2}}^k \left\{ 0, \min \left(\sigma_{j+\frac{1}{2}} |a_{j+\frac{1}{2}}^k|, s_{j+\frac{1}{2}} \sigma_{j-\frac{1}{2}} |a_{j-\frac{1}{2}}^k| \right) \right\}, \quad s_{j+\frac{1}{2}}^k = \text{sgn} \left(a_{j+\frac{1}{2}}^k \right) \quad (24)c$$

$$\sigma_{j+\frac{1}{2}}^k = \frac{1}{2} \left[E_{j+\frac{1}{2}}^k - \lambda \left(a_{j+\frac{1}{2}}^k \right)^2 \right], \quad E_{j+\frac{1}{2}}^k = \int_0^1 |a^k(U(t))| dt \quad (24)d$$

$$\gamma_{j+\frac{1}{2}}^k = \begin{cases} (g_{j+1}^k - g_j^k) / a_{j+\frac{1}{2}}^k & \text{当 } a_{j+\frac{1}{2}}^k \neq 0 \\ 0 & \text{当 } a_{j+\frac{1}{2}}^k = 0 \end{cases} \quad (24)e$$

(24)b中的积分是在连接 U_j 和 U_{j+1} 的状态空间中的路径上进行^[3]。(24)d中的积分可近似地用简单算术表达式代替。

在常系数情形下,定义向量网格函数 U 总变差

$$TV(U) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^m |a_{j+\frac{1}{2}}^k|$$

容易证明以下定理成立。

定理4 格式(24)a—(24)e是二阶精度逼近于(22),在常系数情形,在 CFL 类条件

$$\lambda \max_{j,k} \left[E_{j+\frac{1}{2}}^k + |\gamma_{j+\frac{1}{2}}^k| \right] \leq \frac{1}{1-\theta}$$

限制下是 TVD 格式。

5 数值算例

为了检验二阶修正格式的效果,我们计算了一维气动力学方程组和 Burger 方程的 Riemann 问题,所有计算均在 Alberta 大学 Amdahl 5870 机上完成。

5.1 一维气动力学方程组 Riemann 问题

方程可表为(22)的形式,此时 $U = (\rho, \rho v, e)^T$, $F(U) = (\rho v, P + \rho v^2, (P + e)v)^T$ 。

ρ, v, e 和 $P = (r_1 - 1)(e - \frac{1}{2}\rho v^2)$ 分别表示密度,速度,单位体积总能量和压力。 $r_1 = \text{const}$,

$c = \sqrt{r_1 P / \rho}$ 是声速。 $A(U)$ 的特征值为

$$a^1(U) = v - c, \quad a^2(U) = v, \quad a^3(U) = v + c \quad (25)$$

$A(U)$ 的右特征向量

$$R^1 = (1, v - c, H - vc)^T, \quad R^2 = (1, v, \frac{1}{2}v^2)^T, \quad R^3 = (1, v + c, H + vc)^T \quad (26)$$

这里 $H = (e + P) / \rho = \frac{c^2}{r_1 - 1} + \frac{1}{2}v^2$ 是热焓。根据[1]可计算出 $a_{j+\frac{1}{2}}^k$ 。假定

$$U(x, 0) = U_0(x) = \begin{cases} U_L & \text{当 } x \leq 0 \\ U_R & \text{当 } x > 0 \end{cases}$$

使用以下两组初值计算:

$$U_L = (0.445, 0.311, 8.928)^T, \quad U_R = (0.5, 0, 1.4275)^T \quad (\text{第一组}) \quad (27)$$

$$U_L = (1, 0, 2.5)^T, \quad U_R = (0.125, 0, 0.25)^T \quad (\text{第二组}) \quad (28)$$

使用格式(24)a—(24)e, 计算了(22),(27)和(22),(28)的解。取 $\Delta x = 0.01, \Delta t = 0.001$, 100步后在 $t = 0.1$ 的二阶修正 E-O 格式与一阶 E-O 格式的数值结果分别在图 1 至图 2 中所示。从图可见,修正格式在激波过渡区网点少,图形较陡窄,有较高的分辨率,明显优于原一阶格式。

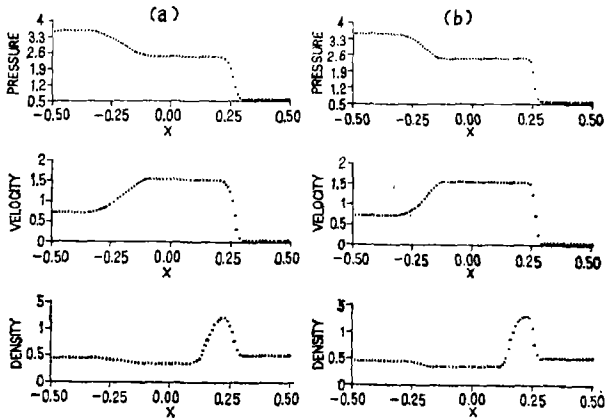


图1 方程组(22)带第一组初值(27)的计算结果 (a) 一阶E-O格式
(b) 修正二阶E-O格式

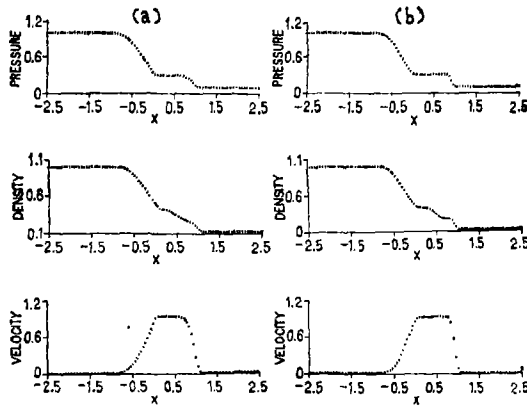


图2 方程组(22)带第二组初值(28)的计算结果 ((a)、(b)说明如同图1)

5.2 Burger 方程 Riemann 问题

其方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x \leq 0 \\ u_R, & x > 0 \end{cases}$$

使用以下两个二阶E格式进行计算。

(i) 修正(二阶)E-O格式(11), 其中

$$E_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left[\frac{1}{2} (u_j^2 + u_{j+1}^2) - (u_j^{+2} + u_{j+1}^{-2}) \right] \cdot \frac{1}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u}, & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \neq 0 \\ |u_j|, & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = 0 \end{cases}$$

(ii) 修正(二阶)Godunov格式(11), 其中

$$E_{j+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \left[\frac{1}{2} (u_j^2 + u_{j+1}^2) - \max(u_j^{+2}, u_{j+1}^{-2}) \right] \cdot \frac{1}{\Delta_{j+\frac{1}{2}} u}, & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u \neq 0 \\ |u_j|, & \text{当 } \Delta_{j+\frac{1}{2}} u = 0 \end{cases}$$

这里 $u_j^+ = \max(u_j, 0)$, $u_j^- = \min(u_j, 0)$, $\Delta_{j+\frac{1}{2}} u = u_{j+1} - u_j$.

$$\text{初始值取 } u(x, 0) = \begin{cases} u_L = 2, 1, -1 \\ u_R = 0.5, -1, 1 \end{cases}$$

取 $\Delta x = 0.02$, $\Delta t = 0.01$. 50步后计算结果图形表明, 修正格式与原E-O格式和Godunov格式的结果十分接近, 未有明显改善, 在此其图形从略.

参 考 文 献

- [1] Harten A, *J. Comp. Phys.*, 49(1983), 357~393
- [2] Harten A, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21(1984), 1, 1~23
- [3] Osher s et al., *Math. of Comp.*, 38 (1981), 158, 339~377
- [4] Sweby P K, *SIAM J. Numer. Anal.*, 21 (1984), 5, 995~1011
- [5] Van Leer B, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, 5 (1984), 1, 1~20

A Class of Second Order Accurate Schemes for Hyperbolic Conservation Laws

Xu Shurong* Y. S. Wong

Abstract

The first order E-schemes for hyperbolic conservation laws are generalized to second order TVD schemes. In particular, second order accurate E-O (Enquist-osher) schemes are obtained. Some theoretical analysis and numerical examples are given.

Keywords Conservation laws, finite difference schemes, E-scheme, total variation diminishing (TVD)

* Department of Computer Science