

# 一类非线性函数积分方程解的存在唯一性

张丽清 禩启沃

(计算机科学系)

## 摘要

研究一类非线性函数积分方程解的存在唯一性。引进一个刻划方程解性质的 Banach 空间,并在一定条件下证明了算子的局部压缩性质,然后证明了整体解的存在唯一性。

**关键词** 非线性, 函数方程, 局部压缩, 整体解

## 1 引言

考虑一类非线性函数积分方程

$$\alpha(t) = \sum_{i=1}^n F_i(\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t), t)\alpha(\lambda_i t) + G(\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t), t) \quad (1)$$

其中 $\alpha(t)$ 是未知函数,  $|\lambda_i| < 1$ ,  $\alpha^i(t) = \int_0^{\lambda_i t} \alpha(\tau) d\tau$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。  $G$ 、 $F_i$  是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 上的一阶连续可微函数。

在微分动力学中, 双曲不动点的一维不变流形所满足的方程可以转化为方程(1)的形式<sup>[1]</sup>, 另外线性双曲型方程和复合-混合方程组某些问题的求解, 可归结为方程(1)的线性情形<sup>[2,3]</sup>。对于方程(1)的某些线性特殊情形, 例如 $F_i$ 为常数,  $G$ 与 $\alpha(t)$ 无关时, 其唯一可解的充分必要条件已有了较丰富的结果<sup>[4]</sup>。本文讨论在非线性情况下方程(1)解的存在唯一性, 通过逐步缩小时间变量的方法, 证明了由方程(1)右端定义的算子的局部压缩性质, 继而证明了解的整体存在性和唯一性。

## 2 一个函数空间

引进函数空间

$$M_T = \{\alpha(t) \mid \alpha(t) \in C[-T, T], \alpha(t) = O(|t|^\mu), \mu > 0, T > 0\},$$

定义 $M_T$ 上的模为

$$\|\alpha(t)\| = \sup_{\substack{t \in [-T, T] \\ t \neq 0}} \frac{|\alpha(t)|}{|t|^\mu}, \quad \alpha(t) \in M_T \quad (2)$$

容易验证 $\|\cdot\|$ 满足模的3个公理。

**定理1**  $M_T$ 是一个Banach空间。

**证明** 只需要验证 $M_T$ 在 $\|\cdot\|$ 意义下是完备的即可。考虑 Cauchy 序列  $\{\beta_n(t)\}$ ,

对于任给的 $\varepsilon > 0$ , 存在 $N$ , 当 $m, n \geq N$ 时,

$$\|\beta_m(t) - \beta_n(t)\| < \varepsilon \quad (3)$$

或者  $|\beta_m(t) - \beta_n(t)| < \varepsilon |t|^\mu, \quad t \in [-T, T]$  (4)

由(4)式知 $\{\beta_n(t)\}$ 是极大模意义下的Cauchy序列. 因此存在 $\beta(t) \in C[-T, T]$ , 使得 $\beta_n(t)$ 在极大模意义下收敛到 $\beta(t)$ . 在(4)式中令 $m \rightarrow \infty$ , 得

$$|\beta(t) - \beta_n(t)| \leq \varepsilon |t|^\mu, \quad n \geq N \quad (5)$$

由于 $\beta_N(t) \in M_T$ , 知存在常数 $C > 0$ , 使得 $|\beta_N(t)| \leq C |t|^\mu$ , 由(5)式得 $|\beta(t)| \leq |\beta_N(t)| + \varepsilon |t|^\mu \leq (C + \varepsilon) |t|^\mu$ , 即 $\beta(t) \in M_T$ . 再由(5)式立即得出 $\{\beta_n(t)\}$ 在 $M_T$ 中收敛到 $\beta(t) \in M_T$ .

因此 $M_T$ 是一个Banach空间.

记  $\alpha_\lambda(t) = \alpha(\lambda t), \quad |\lambda| < 1, \quad \bar{\alpha}(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau.$

**引理** 若 $\alpha(t) \in M_T, \delta(t) \in C[-T, T]$ , 则

$$\|\alpha_\lambda\| \leq |\lambda|^\mu \|\alpha\|, \quad |\lambda| < 1 \quad (6)$$

$$\|\bar{\alpha}\| \leq \frac{T}{\mu+1} \|\alpha\| \quad (7)$$

$$\|\delta \cdot \alpha\| \leq \max_{t \in [-T, T]} |\delta(t)| \|\alpha\| \quad (8)$$

**证明** 由定义

$$\|\alpha_\lambda\| = \sup_{t \in [-T, T], t \neq 0} \frac{|\alpha(\lambda t)|}{|t|^\mu} \leq \sup_{t \in [-T, T], t \neq 0} \frac{|\alpha(t)|}{|t|^\mu} |\lambda|^\mu = |\lambda|^\mu \|\alpha\|.$$

同理可证(7)和(8)式.

### 3 解的存在唯一性

方程(1)解的存在唯一性等价地讨论按下列定义算子 $P$ 的不动点的存在唯一性.

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^n F_i(\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t), t) \alpha(\lambda_i t) + G(\alpha^1(t), \dots, \alpha^n(t), t) \quad (9)$$

下面证明算子 $P$ 在空间 $M_T$ 的某个子集 $S_{\bar{T}}$ 上是自身映射, 且是压缩的. 继而证明算子 $P$ 的不动点的存在性.

**定理 2** 若 $\sum_{i=1}^n |F_i(0, \dots, 0)| |\lambda_i|^\mu < 1$ , 且 $G(0, \dots, 0, t) = 0 (|t|^\mu)$ , 则方程(1)在 $M_T$ 中的解存在且唯一.

**证明** 由于 $|\lambda_i| < 1$ , 方程(1)在某个邻域 $[-\bar{T}, \bar{T}]$ 的局部解的存在性蕴涵整体解的存在性. 令 $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ , 由 $F_i$ 的连续性知, 存在常数 $K > 0, T_0 > 0$ , 使得

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \max_{\substack{|\xi| \leq K \\ |t| \leq T_0}} |F_i(\xi, t)| |\lambda_i|^\mu < 1. \quad (10)$$

考虑集合

$$S_{\bar{T}} = \{\alpha(t) | \alpha(t) \in M_{\bar{T}}, \|\alpha(t)\| \leq \varepsilon\}$$

其中 $\bar{T} (\bar{T} \leq T_0)$ 待定,  $\varepsilon$ 是给定的正数. 将证明当 $\bar{T}$ 充分小时,  $P$ 是 $S_{\bar{T}}$ 中的自身压缩映射.

首先取 $T_1 = \min(\frac{K(\mu+1)}{\varepsilon\sqrt{n}}, T_0, 1)$ , 则对于 $\alpha(t) \in S_{T_1}$ , 有

$$\|\alpha^i(t)\| \leq \frac{T_1}{\mu+1} \|\alpha\| \leq \frac{T_1}{\mu+1} \cdot \varepsilon \leq K/\sqrt{n}$$

且 
$$\max_{t \in (-T, T)} \sqrt{\sum_{i=1}^n |\alpha^i(t)|^2} \leq K \tag{11}$$

考虑映射

$$P(\alpha) = \sum_{i=1}^n F_i(\alpha^1, \dots, \alpha^n, t) \alpha(\lambda_i t) + G(0, \dots, 0, t) + G(\alpha^1, \dots, \alpha^n, t) - G(0, \dots, 0, t) \tag{12}$$

利用引理中的不等式，并注意到(11)，得

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n F_i(\alpha^1, \dots, \alpha^n, t) \alpha(\lambda_i t) \right\| \\ & \leq \sum_{i=1}^n \max_{\substack{|\xi| < K \\ |t| < T_0}} |F_i(\xi, t)| |\lambda_i|^\mu \|\alpha(t)\| \leq \zeta \|\alpha\| \end{aligned} \tag{13}$$

同样利用中值公式及引理中的不等式，得

$$\begin{aligned} & \|G(\alpha^1, \dots, \alpha^n, t) - G(0, \dots, 0, t)\| \\ & = \left\| \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial \alpha^i}(\theta_1 \alpha^1, \dots, \theta_n \alpha^n, t) \cdot \alpha^i \right\| \leq \bar{G} \cdot T \|\alpha\| \end{aligned} \tag{14}$$

其中  $0 \leq \theta_i \leq 1$ ,  $\bar{G} = \sum_{i=1}^n \max_{\substack{|\xi| < K \\ |t| < T_0}} \left| \frac{\partial G(\xi, t)}{\partial \xi_i} \right| \frac{|\lambda_i|^\mu}{\mu+1}$ . 结合(12)~(14)，得到

$$\|P\alpha\| \leq (\zeta + \bar{G}T) \|\alpha\| + \|G(0, \dots, 0, t)\|$$

取  $T_2 (T_2 \leq T_1)$  充分小，使得  $\zeta + \bar{G}T_2 < 1$ ，再由条件  $G(0, \dots, 0, t) = 0 (|t|^\mu)$ ，存在  $T_3 (T_3 \leq T_2)$ ，使得

$$\sup_{\substack{|t| < T_3 \\ |t| \neq 0}} \frac{|G(0, \dots, 0, t)|}{|t|^\mu} \leq \frac{1 - (\zeta + \bar{G}T_2)}{2} \varepsilon$$

这时，对于  $\alpha(t) \in S_{T_3}$ ，有  $\|P\alpha\| \leq \varepsilon$ ，即  $P$  是  $S_{T_3}$  中的自身映射。下面证明当  $T$  充分小时， $P$  是  $S_T$  中的压缩映射。对于  $\alpha_1, \alpha_2 \in S_T$ ，( $T \leq T_0$ )

$$\|P\alpha_1 - P\alpha_2\| \leq \|P_1(\alpha_1, \alpha_2)\| + \|P_2(\alpha_1, \alpha_2)\| + \|P_3(\alpha_1, \alpha_2)\| \tag{15}$$

其中 
$$P_1(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n F_i(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n, t) (\alpha_1(\lambda_i t) - \alpha_2(\lambda_i t))$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n (F_i(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n, t) - F_i(\alpha_2^1, \dots, \alpha_2^n, t)) \alpha_2(\lambda_i t)$$

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2) = G(\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^n, t) - G(\alpha_2^1, \dots, \alpha_2^n, t)$$

利用引理中的不等式及(11)式，得

$$\|P_1(\alpha_1, \alpha_2)\| \leq \sum_{i=1}^n \max_{\substack{|\xi| < K \\ |t| < T_0}} |F_i(\xi, t)| \|\alpha_1(\lambda_i t) - \alpha_2(\lambda_i t)\| \leq \zeta \|\alpha_1 - \alpha_2\| \tag{16}$$

同理可得：

$$\|P_2(\alpha_1, \alpha_2)\| \leq \bar{F} T \|\alpha_1 - \alpha_2\| \tag{17}$$

$$\|P_3(\alpha_1, \alpha_2)\| \leq \bar{G} T \|\alpha_1 - \alpha_2\| \tag{18}$$

其中  $\bar{F} = T_0^\mu \varepsilon \sum_{i,j=1}^n \max_{\substack{|\xi| < K \\ |t| < T_0}} \left| \frac{\partial F_i(\xi, t)}{\partial \xi_j} \right| |\lambda_j|^\mu / (\mu + 1)$ . 结合(16)~(18)得

$$\|P\alpha_1 - P\alpha_2\| \leq (\zeta + (\bar{F} + \bar{G})T) \|\alpha_1 - \alpha_2\| \tag{19}$$

取  $T_4$  充分小, 使得  $\theta = \zeta + (\bar{F} + \bar{G})T_4 < 1$ , 这时, 映射  $P$  在  $S_{T_4}$  上是压缩映射. 取  $\bar{T} = \min(T_3, T_4)$ , 则  $P$  是  $S_{\bar{T}}$  上的自身压缩映射. 设  $\alpha_0 \in S_{\bar{T}}$ , 则  $\alpha_{k+1} = P\alpha_k \in S_{\bar{T}} (k = 0, 1, \dots)$ , 容易验证  $\hat{\alpha} = \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$  是  $P$  在  $S_{\bar{T}}$  中的不动点. 这就证明了方程(1)解的存在性.

现在考虑唯一性. 设  $\alpha_1, \alpha_2 \in M_T$  是方程(1)的解, 由上面证明过程可知, 存在  $T_5$ , 使得  $P$  在集合  $S_{T_5} = \{\alpha(t) | \alpha(t) \in M_{T_5}, \|\alpha\| \leq \max(\|\alpha_1\|, \|\alpha_2\|)\}$  上是压缩的, 特别地  $\|\alpha_1 - \alpha_2\| = \|P\alpha_1 - P\alpha_2\| \leq \theta \|\alpha_1 - \alpha_2\|$ ,  $0 \leq \theta < 1$ , 所以必有  $\alpha_1 = \alpha_2$ . 即方程(1)的解在  $M_T$  中是唯一的.

**注** 若方程(1)是线性的, 即  $F_i$  是常数,  $G$  与  $\alpha(t)$  无关时, 定理(2)中的条件可以放松到  $G(t) = O(|t|^\mu)$ , 见[2].

### 参 考 文 献

[1] Morinaka M., *J. Math. Kyoto Univ*, 23(1983)  
 [2] 华罗庚等, 二阶两个自变数两个未知函数的常系数线性偏微分方程组, 科学出版社, 1979  
 [3] Теун О М, Известия Высших Ученьих Завелений Математика, 1980, 9, 41~49  
 [4] 吴兹潜等, 中山大学学报(自然科学版), 1985, 2

## The Unique Solvability of a Class of Non-linear Functional Integral Equations

Zhang Liqing\* Xuan Qiwo

### Abstract

This paper deals with the existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear functional integral equations. A Banach space characterizing the property of solution is first introduced, then a local contraction of an operator defined by equation is proved under some conditions, and finally the existence and uniqueness of the global solution is obtained.

**Keywords** non-linearity, functional equation, local contraction, global solution

\* Department of Computer Science