第29卷　第2期　中山大学学报(自然科学版)　Vol.29　No.2
1990年　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　1990

解析函数的从属关系

林 和 曾
(数学系)

摘　要

设f与F在单位圆盘U内解析，若F在U内单叶，$f(0)=F(0)$且$f(U)\subset F(U)$，则称f从属于F，记作$f\prec F$。本文对满足某些条件的函数p，找到单叶函数q，使得$p\prec q$，而且所找到的q在某种意义下为最好。

关键词　从属，微分从属，最佳控制

设$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+\cdots(n\geqslant1)$是在单位圆盘$U$内解析的函数，其全体记作$A_n$。

若f在U内解析，F在U内单叶解析，如果$f(0)=F(0)$且$f(U)\subset F(U)$，则称函数f从属于F，并记作$f\prec F$或$f(z)\prec F(z)$。

设函数$\phi:C^2\to C$在区域$D\subset C^2$内解析，h在U内单叶解析，p在U内解析，又当$z\in U$时，$(p(z),zp'(z))\in D$，且p满足微分从属

$$\phi(p(z),zp'(z))\prec h(z) \tag{1}$$

如果有单叶解析函数q，使得对满足(1)的每个p都有$p\prec q$，则称q是微分从属(1)的一个控制。如果q_1是(1)的一个控制，而且对(1)的每个控制q，都有$q_1\prec q$，则称q_1为(1)的最佳控制。

引理1[1]　设$p(z)=a+b_nz^n+\cdots(n\geqslant1)$在$U$内解析，$q$在$\bar{U}$上除了可能有一个极点在$\partial U$上外是单叶解析的，而且$p(0)=q(0)$。若$p$不从属于$q$，则有$z_0\in U$，$\zeta_0\in\partial U$及实数$m\geqslant n$，使得$p(|z|<|z_0|)\subset q(U)$，$p(z_0)=q(\zeta_0)$与$z_0p'(z_0)=m\zeta_0q'(\zeta_0)$。

设有函数$L(z,t)(z\in U,t\geqslant0)$，对$t\geqslant0$，$L(\cdot,t)$在$U$内单叶解析，对$z\in U$，$L(z,\cdot)$在$[0,+\infty)$上连续可微，而当$0\leqslant s\leqslant t$时，$L(z,s)\prec L(z,t)$，则称$L(z,t)$是一个从属链。

引理2[2]　函数$L(z,t)=a_1(t)z+\cdots(a_1(t)\neq0)$是一个从属链当且仅当不等式$\mathrm{Re}\left[z\dfrac{\partial L}{\partial z}\Big/\dfrac{\partial L}{\partial t}\right]>0$对每个$z\in U$，$t\geqslant0$都成立。

本文采用如下的记号：

对$-1\leqslant b<a\leqslant1$，　$p_{a,b}(z)=\dfrac{1+az}{1+bz}$，　$k(z)=z(1+bz)^{\frac{a}{b}-1}(b\neq0)$，

$k(z)=ze^{az}(b=0)$；　$M(\alpha,f,z)=(1-\alpha)\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+\alpha\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$；

本文1988年11月23日收到

$$I_{\beta,\gamma}(f)(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f^{\beta}(t)t^{\gamma-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}.$$

定理 1　设 $f\in A_n(n\geqslant 1)$, $f(z)f'(z)/z\neq 0$, $-1\leqslant b<a\leqslant 1$, $q(z)=(k(z)/z)^{\frac{1}{2}}$，

又设 $\lambda\in R$, $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$, $\alpha\in R$, 若 $e^{i\lambda}M(\alpha,f,z)\prec\frac{(a-b)z}{1+bz}\cos\lambda+e^{i\lambda}$，则

$$\exp\left\{\frac{n(1-\alpha)}{2\cos\lambda}e^{i\lambda}\ln(f(z)/z)+\frac{n\alpha}{2\cos\lambda}e^{i\lambda}\ln f'(z)\right\}\prec q(z).$$

可用引理 1 证明定理 1. 同样可证

定理 2　设 $f\in A_n(n\geqslant 1)$, $f(z)f'(z)/z\neq 0$, $-1\leqslant b<a\leqslant 1$, $b\neq 0$, $\rho\neq 0$, $-1\leqslant\rho\leqslant 1$, $\lambda\in R$, $|\lambda|<\frac{\pi}{2}$, $\alpha\in R$. 若 $e^{i\lambda}M(\alpha,f,z)\prec\frac{(a-b)z}{1+bz}\cos\lambda+e^{i\lambda}$，则

$$\exp\left[\frac{\rho nb(1-\alpha)}{(a-b)\cos\lambda}e^{i\lambda}\ln(f(z)/z)+\frac{\rho nb\alpha}{(a-b)\cos\lambda}e^{i\lambda}\ln f'(z)\right]\prec(1+bz)^{\rho}.$$

定理 1 推广且改进了〔3〕的定理 1，定理 2 推广了〔4〕中的 3 个定理.

利用〔5〕的推论3.1可证

定理 3　若 $\alpha>0$, $f\in A_1$, $M(\alpha,f,z)\prec p_{a,b}(z)$ 且 $k_{\alpha}(z)=\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^z k^{\frac{1}{\alpha}}(t)\,t^{-1}\mathrm{d}t\right]^{\alpha}$，则

$$\frac{zf'}{f}\prec\frac{zk_{\alpha}'}{k_{\alpha}}\prec p_{a,b}.$$

在定理 3 中取 $\alpha=1$, $a=1-2\beta(\beta\in[0,1))$, $b=-1$，便得〔6〕的主要结果.

定理 4　函数 $1+\frac{zk''}{k'}$ 在 U 内单叶解析. 又若 $f\in A_1$, $f(z)/z\neq 0$，则

$$\left(1+\frac{zf''}{f'}\right)\prec\left(1+\frac{zk''}{k'}\right)\Rightarrow\frac{zf'}{f}\prec\frac{zk'}{k}\Rightarrow\frac{f}{z}\prec\frac{k}{z}$$

而且 $\frac{zk'}{k}$ 是 $\left(p+\frac{zp'}{p}\right)\prec\left(1+\frac{zk''}{k'}\right)$ 的最佳控制，$\frac{k}{z}$ 是 $\left(1+\frac{zp'}{p}\right)\prec\frac{zk'}{k}$ 的最佳控制.

证明　简记 $q=p_{a,b}$，易知 $\frac{zk'}{k}=q$，又记 $h=1+\frac{zk''}{k'}=q+\frac{zq'}{q}$.

通过计算可以证明函数 $g\equiv\frac{zq'}{q}$ 是星形的，即有 $g(0)=0$, $g'(0)\neq 0$, $\mathrm{Re}\frac{zg'(z)}{g(z)}>0$. 于是有

$$\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{g(z)}=\mathrm{Re}\left[q(z)+\frac{zg'(z)}{g(z)}\right]>0$$

即函数 $h\equiv 1+\frac{zk''}{k'}$ 是近于凸的，从而是单叶解析的.

若记 $p=\frac{zf'}{f}$，则 p 在 U 内解析, $p(0)=q(0)$, 且有 $p+\frac{zp'}{p}=1+\frac{zf''}{f'}$，于是

$$\left(p+\frac{zp'}{p}\right)\prec\left(q+\frac{zq'}{q}\right)\equiv h \qquad (2)$$

若设 p 不从属于q,依引理1则有$z_0\in U$,$\zeta_0\in\partial U$及$m\geqslant1$，使得 $p(z_0)=q(\zeta_0)$与 $z_0p'(z_0)=m\zeta_0q'(\zeta_0)$，故

$$p(z_0)+\frac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}=q(\zeta_0)+\frac{m\zeta_0q'(\zeta_0)}{q(\zeta_0)}$$

作函数$L(z,t)=q(z)+(1+t)\dfrac{zq'(z)}{q(z)}$，易知$L(z,t)$当 $t\geqslant0$ 时在U内单叶解析，而当 $z\in U$ 时在$[0,+\infty)$上连续可微，又有

$$\left.\frac{\partial L(z,t)}{\partial z}\right|_{(0,t)}=q'(0)+(1+t)q'(0)=(2+t)(a-b)\neq0$$

$$\mathrm{Re}\left[z\frac{\partial L}{\partial z}\Big/\frac{\partial L}{\partial t}\right]=\mathrm{Re}\left[q(z)+(1+t)\frac{zg'(z)}{g(z)}\right]>0,\quad z\in U,\ t\geqslant0.$$

依引理2，$L(z,t)$是一个从属链，因此，若$0\leqslant s\leqslant t$，则$L(z,s)\prec L(z,t)$。由于$L(z,0)=h(z)$，故$L(\zeta,t)\notin h(U)$对所有$\zeta\in\partial U,t\geqslant0$都成立。特别地，$L(\zeta_0,m-1)\notin h(U)$。但$L(\zeta_0,m-1)=q(\zeta_0)+\dfrac{m\zeta_0q'(\zeta_0)}{q(\zeta_0)}=p(z_0)+\dfrac{zp'(z_0)}{p(z_0)}$,于是$p(z_0)+\dfrac{z_0p'(z_0)}{p(z_0)}\notin h(U)$,

这与式(2)矛盾，故应有 $p\prec q$，即 $\dfrac{zf'}{f}\prec\dfrac{zk'}{k}$。又因 q 满足式(2),所以$q=\dfrac{zk'}{k}$ 是 $p+\dfrac{zp'}{p}\prec h$ 的最佳控制。

其次,记 $q_1=\dfrac{k}{z}$,则因 $q_1'(0)\neq0$,且 $\mathrm{Re}\left(1+zq_1''(z)\Big/q_1'(z)\right)=\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+(a-b)z}{1+bz}\right)>-\dfrac{1}{2}$,所以 q_1 在U内单叶解析.若记$p_1=\dfrac{f}{z}$,则p_1在U内解析,$p_1(0)=q_1(0)$且$1+\dfrac{zp_1'}{p_1}=\dfrac{zf'}{f}\prec\dfrac{zk'}{k}=1+\dfrac{zq_1'}{q_1}$，于是可用上面的证法得知$\dfrac{f}{z}\prec\dfrac{k}{z}$且$\dfrac{k}{z}$是$1+\dfrac{zp'}{p}\prec\dfrac{zk'}{k}$的最佳控制。证毕

类似可证

定理5 设 $\alpha>0$，则$M(\alpha,k,z)$在U内单叶解析.又若 $f\in A_1$,$M(\alpha,f,z)\prec M(\alpha,k,z)$，则$\dfrac{zf'}{f}\prec\dfrac{zk'}{k}$，而且 $p_{a,b}$ 是 $\left(p(z)+\alpha\dfrac{zp'(z)}{p(z)}\right)\prec M(\alpha,k,z)$的最佳控制。

定理6 设 $\beta>0$, $\mathrm{Re}\gamma\geqslant0$，$f\in A_1$, 若$\dfrac{zf'}{f}\prec\dfrac{zk'}{k}$,$F=I_{\beta,\gamma}(f)$, $K=I_{\beta,\gamma}(k)$， 则

$$\frac{zF'}{F}\prec\frac{zK'}{K}\prec p_{a,b}$$

定理7 设 $\beta>0$,$\mathrm{Re}\gamma\geqslant0$,$f\in A_1$, $\dfrac{f(z)f'(z)}{z}\neq0$,又$-1\leqslant b<a\leqslant1$,$k_{1/\beta}$是定理3中定

义的函数。若 $M(\frac{1}{\beta},f,z)\prec M(\frac{1}{\beta},k_{1/\beta},z)$，$F=I_{\beta,\gamma}(f)$，$K=I_{\beta,\gamma}(k_{1/\beta})$，则

$$M\left(\frac{1}{\beta},F,z\right)\prec M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)\prec p_{a,b}(z)$$

而且 $M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)$ 是 $p+\frac{zp'}{\beta p+\gamma}\prec p_{a,b}$ 的最佳控制。

证明 由 $M\left(\frac{1}{\beta},k_{1/\beta},z\right)=p_{a,b}(z)$，与 $M\left(\frac{1}{\beta},f,z\right)\prec p_{a,b}(z)$，可知 $k_{1/\beta}$ 与 f 都是星形函数，故 F 与 K 都在 U 内解析且 $\frac{F(z)F'(z)}{z}\neq 0$，$\frac{K(z)K'(z)}{z}\neq 0$。

从 $K=I_{\beta,\gamma}(k_{1/\beta})$、$k_{1/\beta}$ 的表达式及 $F=I_{\beta,\gamma}(f)$ 可得

$$M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)+zM_z'\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)\left[\beta M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)+\gamma\right]^{-1}=M\left(\frac{1}{\beta},k_{1/\beta},z\right)=p_{a,b}(z)$$

与

$$M\left(\frac{1}{\beta},F,z\right)+zM_z'\left(\frac{1}{\beta},F,z\right)\left[\beta M\left(\frac{1}{\beta},F,z\right)+\gamma\right]^{-1}=M\left(\frac{1}{\beta},f,z\right)\prec p_{a,b}(z) \tag{3}$$

依〔5〕的推论3.1可知 $M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)$ 在 U 内单叶解析，有 $M\left(\frac{1}{\beta},F,z\right)\prec M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)\prec p_{a,b}(z)$，而且 $M\left(\frac{1}{\beta},K,z\right)$ 是式(3)的最佳控制，证毕。

定理8 设 $\alpha>0$，$\beta\in R$，$\mathrm{Re}\gamma\geqslant 0$，$-1\leqslant b<a\leqslant 1$，$-1\leqslant d<c\leqslant 1$ 及 $f\in A_1$，若有 $g\in A_1$ 满足 $\frac{zg'}{g}\prec p_{c,d}$，且使得 $B(\alpha,\beta,g,f,z)\equiv f^{\alpha-1+i\beta}(z)f'(z)\left[g^{\alpha}(z)z^{i\beta-1}\right]^{-1}\prec p_{a,b}(z)$，而 $F=I_{\alpha+i\beta,\gamma}(f)$，则有 $G\in A_1$，它满足 $\frac{zG'}{G}\prec p_{c,d}$ 且有 $B(\alpha,\beta,G,F,z)\prec p_{a,b}(z)$。

证明 由〔7〕知函数 F 在 U 内解析且 $\frac{F(z)}{z}\neq 0$。定义函数 G

$$G(z)=\left[\frac{\alpha+i\beta+\gamma}{z^{\gamma+i\beta}}\int_0^z g^{\alpha}(t)t^{\gamma+i\beta-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\alpha} \tag{4}$$

依定理6，G 在 U 内解析且 $\frac{zG'}{G}\prec p_{c,d}$。

简记 $q=p_{a,b}$，由 $F=I_{\alpha+i\beta,\gamma}(f)$ 及(4)，可以算得

$$B(\alpha,\beta,G,F,z)+zB_z'(\alpha,\beta,G,F,z)\left[\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}+\gamma+i\beta\right]^{-1}$$
$$=B(\alpha,\beta,g,f,z)\prec p_{a,b}(z)=q(z) \tag{5}$$

若设 $B(\alpha,\beta,G,F,z)$ 不从属于 $q(z)$，依引理1则有 $z_0\in U,\theta_0\in[0,2\pi]$ 及 $m\geqslant 1$，使得 $B(\alpha,\beta,G,F,z_0)=q(e^{i\theta_0})$，及 $z_0B_z'(\alpha,\beta,G,F,z_0)=me^{i\theta_0}q'(e^{i\theta_0})$，因此

$$B(\alpha,\beta,G,F,z_0)+z_0B_z'(\alpha,\beta,G,F,z_0)\left[\alpha\frac{z_0G'(z_0)}{G(z_0)}+\gamma+i\beta\right]^{-1}$$

$$=q(e^{i\theta_0})+me^{i\theta_0}q'(e^{i\theta_0})\left[\alpha\frac{z_0G'(z_0)}{G(z_0)}+\gamma+i\beta\right]^{-1} \quad (6)$$

由于$q(U)$是一个圆或半平面，而$e^{i\theta_0}q'(e^{i\theta_0})$在该象域边界的由点$q(e^{i\theta_0})$出发的外法线方向上，又因$\mathrm{Re}\left[\alpha\frac{zG'(z)}{G(z)}+\gamma+i\beta\right]=\alpha\mathrm{Re}\frac{zG'(z)}{G(z)}+\mathrm{Re}\,\gamma>0$. 故式(6)的右边所表示的点不在$q(U)$内,这与式(5)矛盾。于是定理8成立，证毕。

参考文献

〔1〕 Miller S S et al., *J. Math. Anal. Appl.* 65(1978), 2,289～305

〔2〕 Pommerenke Ch, *Univalent Functions*, Vanderhoeck & Ruprecht, Gottingen, 1975

〔3〕 Obradovic et al., Internal. *J. Math. Math. Sci.*, 9(1986), 3,439～446

〔4〕 Pinchuk B, *Duke Math. J.*, 35(1968), 721～734

〔5〕 Miller S S et al., *Lecture Notes in Math.*, 1013, 292～310

〔6〕 MacGregor T H, *J. London Math. Soc.*, 9(1974/75), 2, 530～536

〔7〕 Ruscheweyh St, *Math. Z.*, 134(1973), 215～219

Subordination by Regular Functions

*Lin Hezeng**

Abstract

Let f and F be analytic in the unit disk U. The function f is subordinate to F, written $f\prec F$, if F is univalent, $f(0)=F(0)$ and $f(U)\subset F(U)$. We consider the problem: for a function p, which satisfies some conditions, we find a univalent function q such that $p\prec q$ and that q is the "smallest".

Keywords subordination, differential subordination, best dominant

* Department of Mathematics