中山大学学报(自然科学版)
第28卷 第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.4
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

垂直圆柱二阶绕射力的近似计算方法

李银波 周清甫
(应用力学与工程系)

摘 要

本文用Taylor方法计算规则波中垂直圆柱二阶绕射力，发现该法对于水深与波数的乘积大于2.5时是有效的，其结果是精确的，但当水深与波数的乘积小于2.5时，结果是不稳定的。因此，须对方法作些改进。

关键词 规则波，绕射，二阶绕射力，入射波，散射波，幅射波，自由面积分

当前在工程应用中，一种能行之有效的求解二阶力的计算方法是：引入一阶幅射势和利用 Green 第二恒等式，把二阶力的计算变为在自由面上对一阶势的积分。但是，这个积分的收敛非常缓慢，收敛解不容易得到[1]。为此，把自由面积分$Fq_{\text{III}}^{(2)}$处理为积分 $Fq_{\text{III}}^{(2)}(a,b)(b\gg a)$和“尾项”积分$F_{q\text{III}}^{(2)}(b,\infty)$之和，前者可用高斯自适应法计算，后者在自由面的无穷远处采用 Bessel 函数的渐近展式，然后通过 Fresnel 正弦和余弦函数表示而求得。本文目的在于通过对文献[1]方法的计算，讨论二阶绕射势求解的另一值得注意的问题，即这个表面积分的处理问题；并讨论这个积分的稳定性、收敛性与水深和波数的关系；以及这个积分的稳定解与积分限b取值范围的一般关系和方法可能的适用范围等。

1 方法的简述

1.1 基本方程和方程组

取柱坐标系$Or\theta z$(见图1)，z轴垂直向上，$O_{r\theta}$位于平均自由面上。流体理想、不可压、流动无旋，则有复势Φ。然后把Φ和η(自由面升高)展开为波陡ε的幂级数，则得到Φ关于ε的一阶解$\Phi^{(1)}$和二阶解$\Phi^{(2)}$分别为：

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi^{(1)}=0, && \text{在全域}V\text{内}\\
&\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}=0, && \text{在底部}z=-d\\
&\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}=0, && \text{在 }z=0\text{上}\\
&\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial n}=0, && \text{在物面}S_0\text{ 上}
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

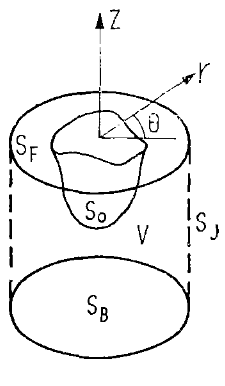

图 1

本文1988年10月7日收到

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi^{(2)}=0, && \text{在全域}V\text{内}\\
&\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}=0, && \text{在底部 } z=-d\\
&\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\Phi^{(1)}\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{g}\cdot\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}\right], z=0\\
&\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial n}=0, \quad \text{在物面}S_0\text{上}
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

再把Φ分解为入射波势Φ_I和散射波势Φ_S：

$$\Phi^{(1)}=\Phi_I^{(1)}+\Phi_S^{(1)}=\mathrm{Re}\left[\phi^{(1)}e^{i\omega t}\right] \tag{3}$$

$\Phi_S^{(1)}$满足（1）式，还满足Sommerfeld 幅射边界条件。

$$\Phi^{(2)}=\Phi_I^{(2)}+\Phi_S^{(2)}=\mathrm{Re}\left[\phi^{(2)}e^{i2\omega t}+\delta^{(2)}t\right] \tag{4}$$

$\Phi_S^{(2)}$满足（2）式，还满足Molin的幅射条件[2]。$\delta^{(2)}$是空间独立的，它对物体直至二阶水平力都没有贡献。

1.2　任意物体上的一阶和二阶力

沿物体表面S_0积分，容易得到β方向的一阶和二阶力为：

$$F^{(1)}=-\rho\int_{S_0}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial t}n_\beta\mathrm{d}s \tag{5}$$

$$F^{(2)}=-\rho\left[-\frac{g}{2}\int_{z=0}(\eta^{(1)})^2n_\beta\mathrm{d}l+\frac{1}{2}\int_{S_0}(\nabla\Phi^{(1)})^2n_\beta\mathrm{d}s+\int_{S_0}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t}n_\beta\mathrm{d}s\right] \tag{6}$$

其中，n_β表示单位内法线方向$\vec{n}$在β方向的投影，$\int_{z=0}\mathrm{d}l$表示水线积分。

把方程（6）中的第一和第二项分解为时间独立的分量$F_m^{(2)}$和振荡分量$F_0^{(2)}$：

$$F_m^{(2)}=\mathrm{Re}\left[\frac{\rho g}{4}\int_{z=0}\zeta^{(1)}\cdot\zeta^{(1)*}n_\beta\mathrm{d}l-\frac{\rho}{4}\int_{S_0}\nabla\Phi^{(1)}\cdot\nabla\Phi^{(1)*}n_\beta\mathrm{d}s\right] \tag{7}$$

$$F_0^{(2)}=\mathrm{Re}\left\{\left[\frac{\rho g}{4}\int_{z=0}\zeta^{(1)}\cdot\zeta^{(1)}n_\beta\mathrm{d}l-\frac{\rho}{4}\int_{S_0}\nabla\Phi^{(1)}\cdot\nabla\Phi^{(1)}n_\beta\mathrm{d}s\right]e^{i2\omega t}\right\} \tag{8}$$

式中，星号“*”表示复共轭量。

（6）式最后一项记为：

$$F_q^{(2)}=-\rho\int_{S_0}\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial t}n_\beta\mathrm{d}s \tag{9}$$

引入一阶幅射势$\Psi^{(1)}$：

$$\Psi^{(1)}=\mathrm{Re}[\phi^{(1)}e^{i2\omega t}]$$

$\phi^{(1)}$满足Laplace方程、自由面条件、底部条件和幅射条件，并在物面S_0上有：

$$\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial n}=n_\beta$$

再利用Green第二恒等式，（9）式写为：

$$F_q^{(2)}=\mathrm{Re}\left\{\left[F_{qI}^{(2)}+F_{qII}^{(2)}+F_{qIII}^{(2)}+F_{qIV}^{(2)}\right]e^{i2\omega t}\right\} \tag{10}$$

其中
$$F_{q\mathrm{I}}^{(2)}=-i2\omega\rho\int_{s_0}\phi_{\mathrm{I}}^{(2)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{11}$$

$$F_{q\mathrm{II}}^{(2)}=i2\omega\rho\int_{s_0}\phi^{(1)}\frac{\partial\phi_{\mathrm{I}}^{(2)}}{\partial n}\mathrm{d}s \tag{12}$$

$$F_{q\mathrm{III}}^{(2)}=-i2\omega\rho\int_{s_F}\left(\phi^{(1)}\frac{\partial\phi_s^{(2)}}{\partial n}-\phi_s^{(2)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{13}$$

$$F_{q\mathrm{IV}}^{(2)}=-i2\omega\rho\int_{s_J}\left(\phi^{(1)}\frac{\partial\phi_s^{(2)}}{\partial n}-\phi_s^{(2)}\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial n}\right)\mathrm{d}s \tag{14}$$

可以证明，当$R\to\infty$时，$F_{q\mathrm{IV}}^{(2)}$的积分是振荡的，并且趋于零[1]。

利用(2)式的自由面条件，(13)式重写为：

$$F_{q\mathrm{III}}^{(2)}=-\frac{2\omega^2\rho}{g}\left\{\int_{s_J}\phi^{(1)}\left[\left(\nabla\phi^{(1)}\cdot\nabla\phi^{(1)}-\nabla\phi_{\mathrm{I}}^{(1)}\cdot\nabla\phi_{\mathrm{I}}^{(1)}\right)-\frac{k^2\operatorname{sech}^2k\mathrm{d}}{2}\cdot\left(\phi^{(1)}\cdot\phi^{(1)}-\phi_{\mathrm{I}}^{(1)}\cdot\phi_{\mathrm{I}}^{(1)}\right)\right]\mathrm{d}s\right\},\quad z=0 \tag{15}$$

1.3　垂直圆柱的一阶和二阶力

按Stokes 波理论，一阶入射波为：

$$\phi_{\mathrm{I}}^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nA_n\frac{\cosh k(z+\mathrm{d})}{\cosh k\mathrm{d}}\cos n\theta \tag{16}$$

一阶散射势为：

$$\phi_s^{(1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nB_n\frac{\cosh k(z+\mathrm{d})}{\cosh k\mathrm{d}}\cos n\theta \tag{17}$$

其中，$\varepsilon_0=1$；$n\neq0$时，$\varepsilon_n=2$，$A_n=\hat{A}_nJ_n(kr)$，$\hat{A}_n=\frac{gA}{\omega}(-i)^n$，$B_n=\hat{B}_nH_n^{(2)}(kr)$，$\hat{B}_n=-\hat{A}_n\left[J_n'(ka)/H_n^{(2)\prime}(ka)\right]$，$J_n$为第一类$n$阶 Bessel 函数，$H_n^{(2)}$为第二类$n$阶Hankel 函数，“ ′ ”表示导数。

二阶入射波势为：

$$\phi_{\mathrm{I}}^{(2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nD_n\cosh2k(z+\mathrm{d})\cos n\theta \tag{18}$$

其中，　$D_n=\hat{D}_nJ_n(2kr)$，　$\hat{D}_n=[-i3A^2\omega/(8\sinh^4k\mathrm{d})](-i)^n$ 。

一阶幅射势为：

$$\phi^{(1)}=\left\{E_0\frac{\cosh K(z+\mathrm{d})}{\cosh K\mathrm{d}}+\sum_{j=1}^{\infty}E_j\frac{\cos m_j(z+\mathrm{d})}{\cos m_j\mathrm{d}}\right\}\cos\theta \tag{19}$$

其中，$E_0=\hat{E}_0H_1^{(2)}(Kr)$，　$\hat{E}_0=2\sinh 2K\mathrm{d}/[K(2K\mathrm{d}+\sinh 2K\mathrm{d})H_1^{(2)\prime}(Ka)]$

$$E_j=\frac{2\sin2m_j\mathrm{d}}{m_j(2m_j\mathrm{d}+\sin2m_jd)}\cdot\frac{K_1(m_jr)}{K_1'(m_ja)}$$

K_1 是第二类一阶修正Bessel 函数，m_j 为方程正根：

$$4\omega^2/g + m_j \tan m_j \mathrm{d} = 0$$

K满足方程

$$4\omega^2/g - K\tanh K\mathrm{d} = 0$$

把(16)、(17)和(18)式代入(5)、(7)和(8)式得：

$$F^{(1)} = \mathrm{Re}[i2\omega\rho a\pi G_1 Z_0 e^{i\omega t}]_{r=a}$$

$$F_m^{(2)} = \mathrm{Re}\left\{\pi\rho a\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{\omega^2}{g} + k^2 Z_1 + \frac{Z_2}{a^2}n(n+1)\right)G_n G_{n+1}^*\right]\right\}_{r=a}$$

$$F_0^{(2)} = \mathrm{Re}\left\{\pi\rho a\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\omega^2}{g} + k^2 Z_1 + \frac{Z_2}{a^2}n(n+1)\right)G_n G_{n+1}\right]e^{i2\omega t}\right\}_{r=a}$$

其中 $G_n = A_n + B_n$，$Z_0 = \omega^2/gk^2$

$$Z_1 = (\sinh 2k\mathrm{d} - 2k\mathrm{d})/(4k\cosh^2 k\mathrm{d}),\quad Z_2 = (\sinh 2k\mathrm{d} + 2k\mathrm{d})/(4k\cosh^2 k\mathrm{d})$$

把(18)和(19)式代入(11)和(12)式得：

$$F_{q\mathrm{I}}^{(2)} = i4\rho a\omega\pi\left[D_1\left(E_0' Z_{30} + \sum_{j=1}^{\infty} E_j' Z_{3j}\right)\right]_{r=a}$$

$$F_{q\mathrm{II}}^{(2)} = -i4\rho a\omega\pi\left[D_1'\left(E_0 Z_{30} + \sum_{j=1}^{\infty} E_j Z_{3j}\right)\right]_{r=a}$$

其中

$$Z_{30} = \left[\frac{\sinh(2k-K)\mathrm{d}}{2(2k-K)} + \frac{\sinh(2k+K)\mathrm{d}}{2(2k+K)}\right]\mathrm{sech}K\mathrm{d}$$

$$Z_{3j} = \left[\frac{2k\sinh 2k\mathrm{d}\cos m_j\mathrm{d} + m_j\cosh 2k\mathrm{d}\sin m_j\mathrm{d}}{4k^2 + m_j^2}\right]\sec m_j\mathrm{d}$$

把(16)和(17)式代入(15)式并对θ积分得($b\to\infty$)：

$$F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(a,b) = -\frac{8\omega^2\rho\pi}{g}\int_a^b\left(E_0 + \sum_{j=1}^{\infty} E_j\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(G_n' G_{n+1}' - A_n' A_{n+1}'\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\omega^4}{g^2} - \frac{k^2\mathrm{sech}^2 k\mathrm{d}}{2} + \frac{n(n+1)}{r}\right)\left(G_n G_{n+1} - A_n A_{n+1}\right)\right]r\mathrm{d}r \qquad (20)$$

(20)式的积分计算是相当困难的，一是因为被积函数高度振荡，二是积分收敛相当缓慢。为此把积分处理为积分 $F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(a,b)(b\gg a)$和“尾项”积分 $F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(b,\infty)$之和，即

$$F_{q\mathrm{III}}^{(2)} = F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(a,b) + F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(b,\infty)$$

当 b 足够大时，把 $\phi_I^{(1)}$、$\phi_s^{(1)}$和$\phi^{(1)}$的渐近式代入(15)式并利用Fresnel 正弦和余弦函数得($b\gg 1$)：

$$F_{q\mathrm{III}}^{(2)}(b,\infty) = \frac{8k\omega^2\rho}{g}\hat{E}_0\frac{e^{i\alpha_1}}{\sqrt{K}}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{3\mathrm{sech}^2 k\mathrm{d}(2\hat{B}_n\hat{B}_{n+1} + \hat{A}_n\hat{B}_{n+1} + \hat{B}_n\hat{A}_{n+1})\right.$$
$$\cdot e^{i(\alpha_n+\alpha_{n+1})}\cdot\sqrt{\frac{1}{k'}}\left[\left(\frac{1}{2} - c\sqrt{\frac{2k'b}{\pi}}\right) - i\left(\frac{1}{2} - s\sqrt{\frac{2k'b}{\pi}}\right)\right]$$

$$+(3\mathrm{sech}^2kd-4)(\hat{B}_n\hat{A}_{n+1}e^{-i(-\alpha_n+\alpha_{n+1})}+\hat{A}_n\hat{B}_{n+1}e^{-i(-\alpha_{n+1}+\alpha_n)})$$
$$\cdot\sqrt{\frac{1}{K}}\left[\left(\frac{1}{2}-c\sqrt{\frac{2Kb}{\pi}}\right)-i\left(\frac{1}{2}-s\sqrt{\frac{2kb}{\pi}}\right)\right]\Bigg\} \tag{21}$$

其中，$k'=2k+K$，$\alpha_n=\frac{2n+1}{2}\pi$，$s$和$c$分别是Fresnel 正弦和余弦函数。

2　数值计算结果

本文所有公式的计算都是在波数$k=0.125\sim3$和3个不同水深$d=1$，3和10m的条件下进行的。程序中用到的其它参数是：圆柱半径$a=1$m，波幅$A=1$m，加速度$g=9.807$ m/s^2，水的密度$\rho=1025$kg/m^3，力单位为牛顿。

2.1　计其结果，$F^{(1)}$、$F_m^{(2)}$、$F_0^{(2)}$、$F_{qI}^{(2)}$和$F_{qII}^{(2)}$与文献〔1〕的结果一致。

2.2　自由面积分$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$是最困难的计算，为提高精度，本文用五点高斯自适应法计算，结果发现：

① 当波数k和水深d的乘积$kd\geqslant2.5$时，积分$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$随积分限b的变化不大，一般b为波长λ的3至4倍时积分已相当稳定，“尾项”积分随b的变化也很小，积分$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$的绝对值远大于“尾项”积分的绝对值，故此积分$F_{qIII}^{(2)}$相当稳定，本文计算结果与文献〔1〕十分接近（见表1）。

表1　$d=1$，$k=3$，$F_{qIII}^{(2)}$（实部）随积分限b的变化情形

Tab. 1　$d=1$，$k=3$，Variation in the $F_{qIII}^{(2)}$ (RP) with the b upper limit of integration

b	$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$	$F_{qIII}^{(2)}(b,\infty)$	$F_{qIII}^{(2)}$	文献〔1〕
λ	0.2351E+05	0.1399E+03	0.2365E+05	
2λ	0.2745E+05	0.1267E+03	0.2758E+05	
3λ	0.2761E+05	0.1260E+03	0.2773E+05	0.2998E+05
4λ	0.2761E+05	0.1272E+03	0.2774E+05	
5λ	0.2759E+05	0.1284E+03	0.2771E+05	
6λ	0.2758E+05	0.1287E+03	0.2771E+05	

② 当波数k和水深d的乘积$0.5\leqslant kd\leqslant2.5$时，积分$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$一般随$b$有较大的变化，“尾项”也随$b$有明显的摆动情况，虽然$F_{qIII}^{(2)}(a,b)$的绝对值仍大于“尾项”的绝对值，但$F_{qIII}^{(2)}$不稳定，本文的计算结果与文献〔1〕有差别（表2）。

表2 $d=1$，$k=0.5$，$F_{q\text{III}}^{(2)}$（实部）随积分限 b 的变化情形

Tab. 2 $d=1$, $k=0.5$, Variation in the $F_{q\text{III}}^{(2)}$ (RP) with the b upper limit of integration

b	$F_{q\text{III}}^{(2)}$ (a,b)	$F_{q\text{III}}^{(2)}$ (b,∞)	$F_{q\text{III}}^{(2)}$	文献〔1〕
λ	−0.3781E+04	0.4103E+03	−0.3371E+04	
2λ	−0.6780E+04	0.2238E+04	−0.4542E+04	
3λ	−0.3050E+04	−0.8083E+03	−0.3858E+04	−0.3912E+04
4λ	−0.2016E+04	−0.1377E+04	−0.3393E+04	
5λ	−0.5109E+04	0.9871E+03	−0.4122E+04	

③ 当 k 与 d 的乘积 $kd<0.5$ 时，积分 $F_{q\text{III}}^{(2)}(a,b)$ 随 b 有变化，“尾项”也随 b 呈现剧烈的变化，尤其值得注意的是，“尾项”的绝对值反超出积分 $F_{q\text{III}}^{(2)}(a,b)$ 的绝对值，因而本文的计算结果极不稳定，且与文献〔1〕有较大的差别（表3）。

表3 $d=1$，$k=0.125$，$F_{q\text{III}}^{(2)}$（虚部）随积分限 b 的变化情形

Tab. 3 $d=1$, $k=0.125$, Variation in the $F_{q\text{III}}^{(2)}$ (IP) with the b upper limit of integration

b	$F_{q\text{III}}^{(2)}$ (a,b)	$F_{q\text{III}}^{(2)}$ (b,∞)	$F_{q\text{III}}^{(2)}$	文献〔1〕
λ	−0.8579E+02	−1.4646E+03	−1.5504E+03	
2λ	−0.9518E+02	−0.4440E+03	−0.5392E+03	
3λ	−1.0013E+02	0.0849E+03	−0.0152E+03	−0.9903E+02
4λ	−1.0373E+02	0.4510E+03	0.3472E+03	
5λ	−1.0659E+02	0.7332E+03	0.6266E+03	
6λ	−1.0895E+02	0.9622E+03	0.8582E+03	

3 结果讨论

① 当 $kd>2.5$ 时方法是有效的、省时的，因此适合较深水时的应用，此时表面积分范围 b 一般取5～6倍波长时，便能得到相当精确的结果。

② 当 $kd<2.5$ 时的较浅水情形，即使 b 取得很大，也难以得到稳定值，因此此法用于较浅水时，为了取得准确的结果，方法尚须作出某些改进。

③ 对于其它方法，如何求得涉及到自由面积分的稳定值是应特别注意的问题。

参 考 文 献

〔1〕 Eatock Taylor R et al., *Second order diffraction force on a vertical cylinder in regular waves*, London Centre for Marine Technology, University college London. Torrington Place. London WCLE 7JE, United Kingdom. February 1986

〔2〕 Molin B et al., *Etude on deuxieme ordre du comportement des corps flottants en houle reguliere*, Institut Francais du pelrole, Repport No. 833400 800470 7501, 1985

The Method of an Approximative Calculation of Second Order Diffraction Force on a Vertical Cylinder

*Li Yinbo**　　*Zhou Qingpu*

Abstract

The method suggested by reference 〔1〕 is used to calculate second order diffraction force on a vertical cylinder in regular waves. It is found that the method is effective when the product of the water depth and the wave number is larger than 2.5 and that the result is instable when the product of water depth and the wave number is less than 2.5, In the latter case we must improve the method to obtain an approximative solution.

Keywords regular waves, diffraction, second order diffraction force, incident waves, scattered wave, radiation waves, the free surface integral

* Department of Mechanics