中山大学学报（自然科学版）
第29卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 №.1
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

·研究简报·

连续型样本协差阵的正定性

谢平民 陈图豪
（数学系）

摘 要

在连续型样本，但没有要求同分布的情况下，证明了样本协差阵概率1正定的充要条件是总体样本容量大于总体的维数，这一结果也包含了广义多元统计分析中关于连续型样本协差阵的正定性。

关键词 样本协差阵，连续型随机向量，正定性

引理 1 记 $x=(x_{11}\cdots x_{p1}\cdots x_{1\ p+1}\cdots x_{p\ p+1})'$

$$g(x)=\begin{vmatrix} x_{11}-x_{12} & \cdots & x_{1p}-x_{1\ p+1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{p1}-x_{p2} & \cdots & x_{pp}-x_{p\ p+1} \end{vmatrix}$$

则$G=\{x:g(x)=0\}$是$(R^{p^2+p},\ B^{p^2+p})$上的L-零测集。

证明 易知G是$(R^{p^2+p},\ B^{p^2+p})$上的可测集。往证 G 是L-零测集。当 $p=1$ 时，$g(x)=x_{11}-x_{12}$，显然 G 是$(R^2,\ B^2)$上的 L-零测集。设当 $p=k$ 时，命题成立，而当 $p=k+1$ 时，则因G的 L-测度可分解为

$$\int_G \mathrm{d}x=\int_{G_1}\mathrm{d}x+\int_{G_2}\mathrm{d}x$$

其中，G_1 是 $\{(x_{11}\cdots x_{p1}\cdots x_{1\ p+1}\cdots x_{p\ p+1})':X_{11}=0\}\cap G$；

G_2 是 $\{(x_{11}\cdots x_{p1}\cdots x_{1\ p+1}\cdots x_{p\ p+1})':X_{11}\neq 0\}\cap G$。

X_{i1}是G的第 i 行第一列的代数余子式，依次对上式右端运用归纳法假设及富比尼定理。则引理1得证。

引理 2 设 $\xi^{(1)}\cdots\xi^{(p+1)}$是概率空间$(\Omega,\mathscr{F}P)$上$p+1$个相互独立 p 维连续型随机列向量，则下列行列式值为零的事件概率为

$$P\{|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(p)}-\xi^{(p+1)}|=0\}=0$$

证明 用$f(x)$表示$\xi=(\xi^{(1)}{}'\cdots\xi^{(p+1)}{}')'$的联合密度函数，并注意到$G$是 L-零测集，即得

本文1988年9月15日收到

$$P\{|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(p)}-\xi^{(p+1)}|=0\}=P\{\xi\epsilon G\}=\int_G f(x)\mathrm{d}x=0$$

引理2得证。

引理3　记$U=\begin{bmatrix} & N^{-1/2} \\ U_1 & \vdots \\ & N^{-1/2}\end{bmatrix}$

为N阶正交阵，其中U_1的第i列的前i个元素均为$[i(i+1)]^{-1/2}$，第$i+1$个元素为$-\left(\frac{i}{i+1}\right)^{\frac{1}{2}}$，余下的元素全为零。则存在$N-1$阶非奇异阵$Q$，使

$$U_1=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}Q$$

证明　显然经简单的变换有

$$U_1 \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

而按照矩阵代数的理论，这等价于引理3的结论，引理3得证。

定理　设$\xi^{(1)}\cdots\xi^{(N)}$为概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上N个相互独立的P维连续型随机列向量。记

$$\bar{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}，\quad S=\sum_{i=1}^{N}(\xi^{(i)}-\bar{\xi})(\xi^{(i)}-\bar{\xi})'$$

则协差阵S概率1正定的充要条件是$N>P$。

证明　设U如引理3所示正交阵，作矩阵变换

$$(\eta^{(1)}\cdots\eta^{(N)})=(\xi^{(1)}\cdots\xi^{(N)})U$$

则

$$S=\sum_{i=1}^{N}\xi^{(i)}\xi^{(i)\prime}-N\bar{\xi}\bar{\xi}'=\sum_{i=1}^{N\lambda}\eta^{(i)}\eta^{(i)\prime}$$

$$=(\eta^{(1)}\cdots\eta^{(N-1)})(\eta^{(1)}\cdots\eta^{(N-1)})'\triangleq BB'$$

且$rks=rkB$，但由引理3推知，存在$N-1$阶非奇异阵Q，使

$$B=(\xi^{(1)}\cdots\xi^{(N)})U_1=(\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(N-1)}-\xi^{(N)})Q$$

因而当$N>P$时，使B具有秩P的子集

$$\{w:rkB=p\}=\{w:rk(\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(N-1)}-\xi^{(N)})=p\}$$
$$\supset\{w:rk(\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(p)}-\xi^{(p+1)})=p\}$$

另方面，由引理2可知

$$P\{rk(\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(p)}-\xi^{(p+1)})=p\}=1$$

从而 $$P\{rk(\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\cdots\xi^{(N-1)}-\xi^{(N)})=p\}=1$$

即 $$P\{rkB\}=1$$

充分性得证。必要性从略。

参 考 文 献

〔1〕Dykstra R L, *Ann. Math. statist*, 41 (1970), 2153~2154

〔2〕MORRIS L EATON, et al., *The Annals of statistics*, 1 (1973), 4, 710~717

〔3〕谢平民等，中山大学学报(自然科学版)，1988, 1

The Positive Definiteness of the Covariance Matrix of Continuous Sample

*Xie Pingmin** *Chen Tuhao*

Abstract

By constructing a zero measure set and a matrix of a linear transformation, prove that the generalized covariance matrix of continuous sample is positive definite w.p.1 iff the number of the random vectors is greater than their dimension. This is a generalization of the result of 〔3〕.

Keywords continuous random vector, covariance matrix of sample, positive definiteness

* Department of Mathematics