

# 热传导方程的一种广义差分方法

陈 仲 英

( 计算机科学系 )

## 摘 要

讨论热传导方程初边值问题的一种广义差分方法, 取试探函数空间为二次Lagrange三角形元, 检验函数空间为分片常数, 得到了半离散和全离散两种情形的最佳收敛阶。

**关键词** 广义差分法, 试探函数空间, 检验函数空间, 最佳收敛阶

## 1 引 言

文献[1]从广义Galerkin方法出发, 提出广义差分法, 兼有有限元法的精确性与差分法的计算简单性。文[2]将其推广到二阶椭圆边值问题, 并就试探函数空间为分片一次元, 检验函数空间为分片常数的情形得到与线性有限元相同的收敛阶。文[3]将其推广到抛物型问题。本文以热传导方程为模型, 取试探函数空间为分片二次元, 检验函数空间为分片常数, 导出一种新的广义差分算法, 并得到与二次有限元相同的收敛阶。

考虑如下初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, y, t), & (x, y) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T \\ u(x, y, t)|_{\partial\Omega} = 0, & 0 \leq t \leq T \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), & (x, y) \in \Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Omega$ 是平面多边形域,  $f, u_0 \in L^2(\Omega)$ 。定义

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad u, v \in H_0^1(\Omega)$$

则相应的变分问题为: 求 $u(t) \in H_0^1(\Omega)$  使

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + a(u, v) = (f, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad 0 < t \leq T \\ (u(0), v) = (u_0, v), & \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (2)$$

构造适当的试探函数空间 $U_h \subset H_0^1(\Omega)$ , 检验函数空间 $V_h \subset L^2(\Omega)$ , 取半离散广义Galerkin格式为: 求 $u_h(t) \in U_h$ 使

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, v_h \right) + a(u_h, v_h) = (f, v_h), & \forall v_h \in V_h, \quad 0 < t \leq T \\ (u_h(0), v_h) = (u_0, v_h), & \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (3)$$

全离散广义Galerkin格式为：求  $u_h^m \in U_h$  使

$$\begin{cases} \left( \frac{u_h^{m+1} - u_h^m}{\Delta t}, v_h \right) + a(u_h^{m,\theta}, v_h) = (f(t_m, \theta), v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \quad 0 \leq m \leq M-1 \\ (u_h^0, v_h) = (u_0, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\Delta t$  为时间步长,  $M$  是正整数,  $M \cdot \Delta t = T$ ,  $t_m = m \Delta t$ ,

$$t_m, \theta = \frac{1}{2}(1 + \theta)t_{m+1} + \frac{1}{2}(1 - \theta)t_m$$

$$v^{m,\theta} = \frac{1}{2}(1 + \theta)v^{m+1} + \frac{1}{2}(1 - \theta)v^m, \quad 0 \leq m \leq M-1, \quad \theta \in [0, 1]$$

$$v^m = v(t_m), \quad 0 \leq m \leq M$$

当  $\theta = 0$  时, 上述格式为广义Crank-Nicolson-Galerkin格式, 当  $\theta = 1$  时则为向后差分的广义Galerkin格式.

### 2 试探函数和检验函数空间

作  $\Omega$  的三角剖分  $T_h$ ,  $h$  表示所有三角单元的最大边长. 现构造与  $T_h$  相应的对偶剖分. 设  $P_0$  是任一三角形的顶点,  $P_i (i = 1, 2, \dots)$  是与  $P_0$  相邻的顶点 (图 1),  $P_{0i}$  是  $P_0P_i$  上与  $P_0$  距离为  $\frac{1}{3}|P_0P_i|$  的点, 依次连接  $P_{0i} (i = 1, 2, \dots)$  得到一个围绕  $P_0$  的多边形域  $K_{P_0}^*$ , 作为对偶剖分的单元. 又设  $P_0P_1$  为剖分  $T_h$  的两相邻单元  $\Delta P_0P_1P_2$  和  $\Delta P_0P_1P_3$  的公共边 (图 2),  $Q_1, Q_2$  分别为两三角形的重心,  $M$  为  $P_0P_1$  的中点,  $Q_{02}, Q_{03}, Q_{12}, Q_{13}$  分别为  $P_{10}P_{12}, P_{10}P_{13}, P_{01}P_{02}, P_{01}P_{03}$  的中点, 依次连接  $P_{01}, Q_{12}, Q_{11}, Q_{02}, P_{10}, Q_{03}, Q_2, Q_{13}, P_{01}$  得到一个围绕  $M$  的多边形域  $K_M^*$ , 也作为对偶剖分的单元.  $K_P^*, R_M^*$  称为对偶单元, 所有对偶单元构成  $\Omega$  的一个剖分  $T_h^*$ , 称为对偶剖分.

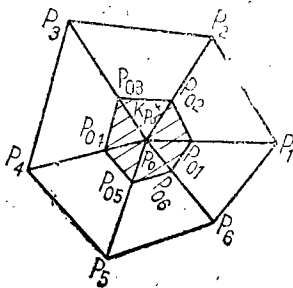


图 1

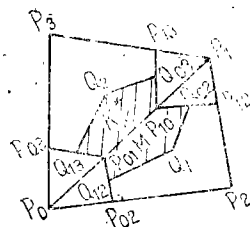


图 2

下面以  $\overline{\Omega}_h$  表示所有三角单元顶点的集合,  $\Omega_h^*$  表示所有三角单元重心的集合,  $\overline{M}_h$  表示所有三角单元边的中点的集合,  $\dot{\Omega}_h = \overline{\Omega}_h - \partial\Omega$ ,  $\dot{M}_h = \overline{M}_h - \partial\Omega$ .  $K_0$  表示含  $Q_0 \in \Omega_h^*$  的三角单元,  $S_0$  表示  $K_0$  的面积.

① 试探函数空间  $U_h$ .  $U_h$  取为相应于  $T_h$  的 Lagrange 二阶元, 即相应于  $P_0 \in \overline{\Omega}_h$  和  $M_0 \in \overline{M}_h$  的基函数分别为满足下列插值条件的分片二次函数

$$\varphi_{P_0}(P) = \begin{cases} 1, & P = P_0, \\ 0, & P \in \overline{\Omega}_h \cup \overline{M}_h - \{P_0\}, \end{cases}$$

$$\varphi_{M_0}(P) = \begin{cases} 1, & P = M_0, \\ 0, & P \in \overline{\Omega}_h \cup \overline{M}_h - \{M_0\}. \end{cases}$$

②检验函数空间  $V_h$ .  $V_h$  取为相应于  $T_h^*$  的分片常数, 即相应于  $P_0 \in \overline{\Omega}_h$  和  $M_0 \in \overline{M}_h$  的基函数分别为

$$\phi_{P_0}(P) = \begin{cases} 1, & P \in K_{P_0}^* \\ 0, & P \notin K_{P_0}^* \end{cases} \quad \phi_{M_0}(P) = \begin{cases} 1, & P \in K_{M_0}^* \\ 0, & P \notin K_{M_0}^* \end{cases}$$

本文假设三角剖分  $T_h$  是正则的, 且每一三角单元的最大角不超过  $\pi/2$ , 最大角 两夹边之比  $\gamma \in [(\frac{2}{3})^{1/2}, (\frac{3}{2})^{1/2}]$ .

### 3 若干引理

任取一三角单元  $K_0$ , 设其顶点为  $P_l(x_l, y_l) (l=i, j, k, \text{逆时序})$ ,  $M_i$  为  $P_j P_k$  的中点,  $P_{ij}$  为  $P_i P_j$  上满足  $|P_i P_{ij}| = \frac{1}{3} |P_i P_j|$  的点,  $Q_i$  为  $P_{ij} P_{ik}$  的中点, 余类推(图3). 任意  $u_h \in U_h$ , 记  $u_P = u_h(P)$ , 则在  $K_0$  上

$$u_h = \sum_{l=i,j,k} (u_{P_l} \varphi_{P_l} + u_{M_l} \varphi_{M_l}) \tag{5}$$

令 
$$\lambda_j = \frac{1}{2S_0} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \\ 1 & x_i & y_i \end{vmatrix}, \quad \lambda_k = \frac{1}{2S_0} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \end{vmatrix},$$

则  $K_0$  变为  $\hat{K}_0$  (图4),

$$u_h = u_{P_i} (1 - \lambda_j - \lambda_k) (1 - 2\lambda_j - 2\lambda_k) + u_{P_j} \lambda_j (2\lambda_j - 1) + u_{P_k} \lambda_k (2\lambda_k - 1) + 4u_{M_i} \lambda_j \lambda_k + u_{M_j} \lambda_k (1 - \lambda_j - \lambda_k) + 4u_{M_k} \lambda_j (1 - \lambda_j - \lambda_k) \tag{6}$$

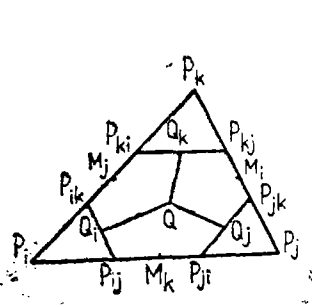


图 3

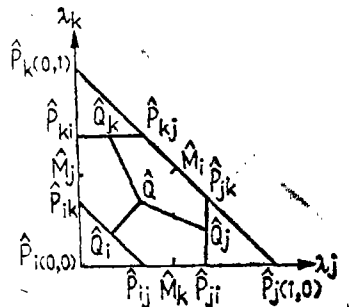


图 4

引理 1

令 
$$\|u_h\|_{0,0} = \left( \sum_{0 \in \Omega_h^*} \frac{S_0}{6} \{u_h\}_0^T \{u_h\}_0 \right)^{1/2}$$

$$\|u_h\|_{0,h} = \left( \sum_{Q \in \Omega_h^*} \frac{S_Q}{1944} \{u_h\}_Q^T B \{u_h\}_Q \right)^{1/2}$$

其中  $\{u_h\}_Q = \begin{pmatrix} u_{P_i} \\ u_{P_j} \\ u_{P_k} \\ u_{M_i} \\ u_{M_j} \\ u_{M_k} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 96 & -16 & -16 & -38 & -13 & -13 \\ -16 & 96 & -16 & -13 & -38 & -13 \\ -16 & -16 & 96 & -13 & -13 & -38 \\ -38 & -13 & -13 & 300 & 98 & 98 \\ -13 & -38 & -13 & 98 & 300 & 98 \\ -13 & -13 & -38 & 98 & 98 & 300 \end{pmatrix}$

则  $\|\cdot\|_{0,Q}, \|\cdot\|_{0,h}$  与  $L^2(\Omega)$  模  $\|\cdot\|_0$  等价。

**证明**

$$\text{对 } u_h \in U_h, \|u_h\|_0^2 = \sum_{Q \in \Omega_h^*} \iint_Q u_h^2 dx dy = \sum_{Q \in \Omega_h^*} 2S_Q \iint_{\hat{K}_Q} u_h^2 d\lambda_j d\lambda_k$$

不难验证  $\iint_{\hat{K}_Q} u_h^2 d\lambda_j d\lambda_k, \{u_h\}_Q^T \{u_h\}_Q, \{u_h\}_Q^T B \{u_h\}_Q$  都是  $u_{P_i}, u_{P_j}, u_{P_k}, u_{M_i}, u_{M_j}, u_{M_k}$

的正定二次型, 因此结论成立。

**引理 2<sup>1)</sup>** 令

$$\|u_h\|_{1,h} = \left\{ \sum_{Q \in \Omega_h^*} [(u_{P_i} - u_{M_i})^2 + (u_{P_j} - u_{M_j})^2 + (u_{P_k} - u_{M_k})^2 + (u_{M_i} - u_{M_j})^2 + (u_{M_i} - u_{M_k})^2] \right\}^{1/2}$$

则  $\|\cdot\|_{1,h}$  与  $H^1(\Omega)$  半模  $|\cdot|_1$  等价。

**引理 3<sup>1)</sup>** 设  $u \in H_0^1(\Omega)$  是变分问题  $a(u, v) = (f, v), \forall v \in H_0^1(\Omega)$  的解,  $u_h \in U_h$  是广义Galerkin近似问题  $a(u_h, v_h) = (f, v_h), \forall v_h \in V_h$  的解, 则有收敛阶估计

$$\|u - u_h\|_1 \leq Ch^2 |D^2 u|_{\max}, \|u - u_h\|_0 \leq Ch^3 |D^2 u|_{\max}$$

定义  $U_h$  到  $V_h$  的插值投影  $\gamma_h$ :

$$\gamma_h u_h = \sum_{P \in \Omega_h} u_h(P) \phi_P + \sum_{M \in M_h} u_h(M) \phi_M, \quad \forall u_h \in U_h$$

**引理 4** 对任  $u_h, \bar{u}_h \in U_h$ , 恒有

$$(\bar{u}_h, \gamma_h u_h) = \sum_{Q \in \Omega_h^*} \frac{S_Q}{1944} \{\bar{u}_h\}_Q^T B \{u_h\}_Q$$

注 1) 田明忠、陈仲英, 椭圆型方程的广义差分法(二次元)

其中  $B = \begin{pmatrix} 96 & -16 & -16 & -38 & -13 & -13 \\ -16 & 96 & -16 & -13 & -38 & -13 \\ -16 & -16 & 96 & -13 & -13 & -38 \\ 8 & 72 & 72 & 300 & 98 & 98 \\ 72 & 8 & 72 & 98 & 300 & 98 \\ 72 & 72 & 8 & 98 & 98 & 300 \end{pmatrix}$

证明 由  $(\bar{u}_h, \gamma_h u_h) = \sum_{Q \in \Omega_h^*} \left[ \sum_{l=i,j,k} (u_{Pl} \int_{K_Q \cap K_{Pl}^*} \bar{u}_h dx dy + u_{Ml} \int_{K_Q \cap K_{Ml}^*} \bar{u}_h dx dy) \right]$

计算可得,证毕.

### 4 半离散广义差分格式收敛阶估计

在(3)中采用前面所构造的  $U_h, V_h$ , 得半离散广义差分格式, 此时,

$$a(u_h, \phi_P) = \int_{\partial K_P^*} \left( -\frac{\partial u_h}{\partial x} dy + \frac{\partial u_h}{\partial y} dx \right),$$

$$a(u_h, \phi_M) = \int_{\partial K_M^*} \left( -\frac{\partial u_h}{\partial x} dy + \frac{\partial u_h}{\partial y} dx \right).$$

**定理 1** 设  $u, u_h$  分别为问题(2), (3)的解, 则对任何  $t \geq 0$ ,

$$\|u - u_h\|_0 \leq C e^{-\eta t} \|u(0) - u_h(0)\|_0 + Ch^3 \left[ |D^3 u|_{\max} + e^{-\eta t} |D^3 u(0)|_{\max} + \int_0^t e^{-\eta(\tau-t)} |D^3 \dot{u}|_{\max} d\tau \right]$$

其中  $C, \eta > 0$  为常数,  $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial \tau}$ , 并设右端各式有意义.

**证明** 令  $\tilde{u}_h \in U_h$  为问题

$$a(\tilde{u}_h, v_h) = a(u, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{7}$$

的解. 记误差

$$u - u_h = e_h + E_h, \quad e_h = u - \tilde{u}_h, \quad E_h = \tilde{u}_h - u_h \tag{8}$$

由引理 3,

$$\|e_h\|_0 \leq Ch^3 |D^3 u|_{\max}, \quad \|\dot{e}_h\|_0 \leq Ch^3 |D^3 \dot{u}|_{\max} \tag{9}$$

现估计  $E_h$ . 由(2), (3), 当  $u$  为古典解时,

$$\left( \frac{\partial E_h}{\partial t}, v_h \right) + a(E_h, v_h) = -(\dot{e}_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \tag{10}$$

算得  $B = \tilde{B}D$ , 其中  $D$  为非奇异矩阵. 在(10)式取  $v_h = \gamma_h \tilde{E}_h$ , 其中  $\tilde{E}_h$  在单元  $K_Q$  上定义为  $\{\tilde{E}_h\}_Q = D\{E_h\}_Q$ , 则用引理 4 得

$$\sum_{Q \in \Omega_h^*} \frac{S_Q}{1944} \{ \tilde{E}_h \}_Q^T \tilde{B}D \{ E_h \}_Q + a(E_h, \gamma_h \tilde{E}_h) = -(\dot{e}_h, \gamma_h \tilde{E}_h)$$

注意引理 1 中模  $\|\cdot\|_{0,h}$  的定义即有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|E_h\|_{0,h}^2 + a(E_h, \gamma_h \bar{E}_h) = -(\dot{e}_h, \gamma_h \bar{E}_h) \tag{11}$$

记

$$a(v_h, \gamma_h w_h) = \sum_{Q \in \Omega_h^*} I_Q(v_h, \gamma_h w_h), \quad v_h, w_h \in U_h \tag{12}$$

$$I_Q(v_h, \gamma_h w_h) = \sum_{l=i,j,k} \left[ w_{P_l} \int_{P_{l+1} P_{l+2}} \left( -\frac{\partial v_h}{\partial x} dy + \frac{\partial v_h}{\partial y} dx \right) + w_{M_l} \int_{P_{l+2} P_{l+1} P_{l+1} P_{l+2}} \left( -\frac{\partial v_h}{\partial x} dy + \frac{\partial v_h}{\partial y} dx \right) \right]$$

此处  $i+1=j, j+1=k, k+1=i$ , 余类推。又记  $a = |P_i P_j|, b = |P_i P_k|, c = |P_j P_k|$ 。

计算可得  $I_Q(v_h, \gamma_h w_h) = \frac{1}{36S_Q} (w_{P_i}, w_{P_j}, w_{P_k}, w_{M_i}, w_{M_j}, w_{M_k})$

$$\begin{pmatrix} 10c^2 & a^2 - b^2 + c^2 & -a^2 + b^2 + c^2 & -9a^2 + 9b^2 + 3c^2 & 9a^2 - 9b^2 + 3c^2 \\ a^2 - b^2 + c^2 & 10a^2 & a^2 + b^2 - c^2 & -6a^2 & 3a^2 - 9b^2 + 9c^2 \\ -a^2 + b^2 + c^2 & a^2 + b^2 - c^2 & 10c^2 & -9a^2 + 3b^2 + 9c^2 & -6b^2 \\ -2c^2 & -5a^2 - 3b^2 + 3c^2 & -3a^2 - 5b^2 + 3c^2 & 13a^2 - 5b^2 + c^2 & -5a^2 + 13b^2 + c^2 \\ 3a^2 - 3b^2 - 5c^2 & -2a^2 & 3a^2 - 5b^2 - 3c^2 & -2a^2 - 8b^2 - 8c^2 & a^2 + 13b^2 - 5c^2 \\ -3a^2 + 3b^2 - 5c^2 & -5a^2 + 3b^2 - 3c^2 & -2b^2 & 13a^2 + b^2 - 5c^2 & -8a^2 - 2b^2 - 8c^2 \end{pmatrix} \cdot (v_{P_i} - v_{M_i}, v_{P_j} - v_{M_j}, v_{P_k} - v_{M_k}, v_{M_i} - v_{M_j}, v_{M_i} - v_{M_k})^T$$

以  $E_h$  代  $v_h, \bar{E}_h$  代  $w_h$ , 记  $Z_Q = (EP_i - EM_i, EP_j - EM_j, EP_k - EM_k, EM_i - EM_j, EM_i - EM_k)^T$ , 代入, 经计算可得

$$I_Q(E_h, \gamma_h \bar{E}_h) = \frac{1}{7008} \cdot \frac{1}{36S_Q} Z_Q^T A Z_Q \tag{13}$$

其中  $A$  写成对称矩阵, 再将  $A$  作合同变换得

$$G^T A G = [a_{ij}]$$

此处  $[a_{ij}]$  对称,  $a_{11} = 74942c^2, a_{12} = 8139a^2 - 11701b^2 + 8139c^2, a_{13} = -11701a^2 + 8139b^2 + 8139c^2, a_{14} = -24581a^2 + 28143b^2 + 29221c^2, a_{15} = 28143a^2 - 24581b^2 + 29221c^2,$   
 $a_{22} = 74942a^2, a_{23} = 8139a^2 + 8139b^2 - 11701c^2, a_{24} = 8361a^2 - 11701b^2 + 8139c^2, a_{25} =$   
 $-37582a^2 - 36282b^2 + 36282c^2, a_{33} = 74942b^2, a_{34} = -36282a^2 - 37582b^2 + 36282c^2,$   
 $a_{35} = -11701a^2 + 8361b^2 + 8139c^2, a_{44} = 100596a^2 + 56286b^2 - 16500c^2, a_{45} = -46847a^2$   
 $-46847b^2 + 51487c^2, a_{55} = 56286a^2 + 100596b^2 - 16500c^2,$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

不妨设  $c$  为  $K_Q$  的最大边。由前面对剖分  $T_h$  的假设有  $a^2 \geq \frac{2}{3}b^2$ ,  $b^2 \geq \frac{2}{3}a^2$ 。于是,

$$\tau_{11} - \sum_{j=1}^3 |a_{1j}| = 222c^2 \geq 222ab \geq 444S_Q,$$

$$a_{22} - \sum_{j=2}^3 |a_{2j}| = 12721a^2 - 21019b^2 + 31705c^2 \geq 10686c^2 \geq 21372S_Q,$$

$$a_{33} - \sum_{j=3}^3 |a_{3j}| = -21019a^2 + 12721b^2 + 31705c^2 \geq 21372S_Q,$$

当  $a_{66} = a_{64} \geq 0$  或  $< 0$  时, 都可推出:  $a_{44} - \sum_{j=4}^6 |a_{4j}| \geq 479S_Q$ , 和  $a_{66} - \sum_{j=6}^6 |a_{6j}| \geq 479S_Q$ 。

由 Gerschgorin 定理知  $A$  的最小特征值  $\lambda \geq 444S_Q$ 。于是由 (12)、(13) 及引理 2 知有  $\alpha > 0$

使  $a(E_h, \gamma_h \tilde{E}_h) \geq \alpha |E_h|_1^2$

再由 (13), (11), (9) 便知有常数  $C, \eta > 0$  使

$$\frac{d}{dt} \|E_h\|_{0,h} + \eta \|E_h\|_{0,h} \leq Ch^3 |D^3 \dot{u}|_{\max}$$

两边乘  $e^{\eta t}$  后对  $t$  积分得

$$\|E_h\|_{0,h} \leq e^{-\eta t} [\|E_h(0)\|_{0,h} + Ch^3 \int_0^t e^{\eta \tau} |D^3 \dot{u}|_{\max} d\tau]$$

据 (8), (9) 就有

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{0,h} &\leq \|e_h\|_{0,h} + \|E_h\|_{0,h} \leq Ch^3 |D^3 u|_{\max} + Ce^{-\eta t} [h^3 |D^3 u(0)|_{\max} \\ &\quad + \|u(0) - u_h(0)\|_{0,h} + h^3 \int_0^t e^{\eta \tau} |D^3 \dot{u}|_{\max} d\tau] \end{aligned}$$

用引理 1 即得所欲证。证毕。

## 5 全离散广义差分格式收敛阶估计

在 (4) 中取  $\theta = 0$  得广义  $C-N$  差分格式

$$\begin{cases} (\bar{\partial}_t u_h^m, v_h) + a(u_h^{m+\frac{1}{2}}, v_h) = (f(t_{m+\frac{1}{2}}), v_h) \\ (u_h^0, v_h) = (u_0, v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{cases} \quad (14)$$

其中  $\bar{\partial}_t v^m = \frac{1}{\Delta t} (v^{m+1} + v^m)$ ,  $v^{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v^{m+1} + v^m) = v^{m,0}$ 。

**定理 2** 对广义  $C-N$  差分格式有如下误差估计

$$\begin{aligned} \|u(t_n) - u_h^n\|_0 &\leq C \|u(0) - u_h^0\|_0 + Ch^3 \{ |D^3 u(0)|_{\max} + |D^3 u(t_n)|_{\max} \\ &\quad + (\int_0^{t_n} |D^3 \dot{u}|_{\max}^2 d\tau)^{1/2} \} + C(\Delta t)^2 (\int_0^{t_n} \|u\|_0^2 d\tau)^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

此处假设上式右端有意义。证明从略。

若考虑误差的  $H_1$ -模估计, 则对上述半离散和全离散广义差分格式分别有

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0^2 + \alpha \int_0^t |u - u_h|_1^2 d\tau &\leq C \{ \|u(0) - u_h(0)\|_0 + h^3 [ |D^3 u(0)|_{\max} \\ &\quad + |D^3 u|_{\max} + (\int_0^t |D^3 \dot{u}|_{\max}^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} ] + h^2 (\int_0^t |D^3 u|_{\max}^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \}^2, \end{aligned}$$

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_0^2 + \alpha \sum_{m=0}^{n-1} |(u - u_h)^{m+\frac{1}{2}}|_1^2 \Delta t \leq C \{ \|u(0) - u_h^0\|_0$$

$$+ h^3 [ |D^3 u(0)|_{\max} + |D^3 u(t_n)|_{\max} + (\int_0^{t_n} |D^3 \bar{u}|_{\max} d\tau)^{\frac{1}{2}} ] \\ + h^2 (\sum_{m=0}^{n-1} |D^3 u(t_{m+\frac{1}{2}})|_{\max} \Delta t)^{\frac{1}{2}} + (\Delta t)^2 (\int_0^{t_n} \|\bar{u}\|_0^2 d\tau)^{\frac{1}{2}} \}^2, (C, a > 0)$$

## 6 数值例子<sup>2)</sup>

用广义C-N差分法、一次有限元法、二次有限元法求解下列初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in \Omega = (0, \pi) \times (0, \pi), \quad t \in (0, 1]$$

$$u|_{\partial \Omega} = 0, \quad t \in [0, 1]$$

$$u|_{t=0} = \sin x \cdot \sin y, \quad (x, y) \in \Omega$$

精确解为  $u = e^{-2t} \sin x \cdot \sin y$ . 取直角三角形网格剖分, 步长为  $\pi/4$ , 时间步长为  $\Delta t = 0.001$  算出  $t = \frac{1}{2}$  时所有节点上近似解的误差(表1). 由表可见, 广义差分法的精确性明显优于一次元, 而比二次元差些.

表1 近似解误差对照

Tab.1 Comparison for the errors of approximate solutions

	广义C-N差分法	一次有限元法	二次有限元法
平均误差	0.005064	0.036336	0.000770
最大绝对误差	0.009187	0.054020	0.001568

## 参 考 文 献

- [1] 李荣华, 吉林大学学报(自然科学版), 1982, 1, 26~40
- [2] 李荣华等, 高等学校计算数学学报, 1982, 2, 140~152
- [3] 李潜, 山东大学学报(自然科学版), 1983, 1, 41~52

## A Generalized Difference Method for the Equations of Heat Conduction

Chen Zhongying\*

### Abstract

We discuss a generalized difference method for the equations of heat conduction. The trial space is the piecewise quadratic polynomials and the test space is the piecewise constants. Optimal rates of convergence for continuous time and discrete time are established.

**Keywords** generalized difference method, trial space, test space, optimal convergence rate

2) 吴起勇(1988届本科生)计算

• Department of Computer Science