

·研究简报·

旋转曲面族成为等位面族的判别条件及其应用

祝宁华

吴正德

(中山大学无线电电子学系) (电子科技大学)

摘 要

本文给出了二维等位曲线族绕对称轴旋转后形成的曲面族成为等位面族的判别条件, 导出了求解与此类曲面有关的空间电位分布的简单方法, 使复杂的三维问题简化为二维问题。并就12种常用的曲面坐标系坐标曲面族能否成为等位面族进行了判断。

关键词 等位, 旋转曲面, 保角映射

W. R. Smythe曾经就一族曲面能否构成等位面族的问题建立了一般性的判别条件^[1]。无限长带电直线的等位面为一族同心圆柱, 当其截面绕过圆心的轴旋转时, 便得到一族同心球面。这族球面可构成等位面族。但任意一族等位线绕对称轴旋转时, 所形成曲面族并不一定是等位面族。本文导出相应的判别条件, 大大简化了有关等位旋转曲面场分布的求解。

1 旋转曲面族成为等位面族的判别条件

若 $F(x, y, z) = C$ 表示一族等位面, 则每一个常数 C 对应一个等位面, 因此可将电位函数写成 $V(x, y, z) = f(C)$ 。在无源空间内, V 满足拉氏方程 $\nabla^2 V = 0$, 求导数可得

$$\nabla^2 V = f''(C) (\nabla C)^2 + f'(C) \nabla^2 C = 0$$

解出

$$\nabla^2 C / (\nabla C)^2 = -f''(C) / f'(C) = \phi(C) \tag{1}$$

由此可知, 要 $F(x, y, z) = C$ 成为一族等位面, 则 $\nabla^2 C / (\nabla C)^2$ 仅是 C 的函数。这就是Smythe作出的重要结论。显然, 参照式(1)可写出二维曲线族 $F(x, y) = C$ 成为等位线族的条件为

$$\nabla_r^2 C / (\nabla_r C)^2 = -f''_1(C) / f'_1(C) = G(C) \tag{2}$$

当这一族曲线绕 y 轴旋转时, 得到一族曲面 $F(r, y) = C$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ 。根据式(1), 该旋转曲面族成为等位面族的条件可写成

$$\left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \right) / \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)^2 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} / \left[\left(\frac{\partial C}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial r} \right)^2 \right] = \phi(C)$$

因为 $F(x, y)$ 和 $F(r, y)$ 具有相同的函数形式, 既然 $F(x, y) = C$ 构成一族等位线, 它

本文1990年3月29日收到

满足式(2), 那么根据 x 和 r 的对应关系, 上式可简化为

$$\frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2\right]} = \phi(C) - G(C) = \phi_1(C) \quad (3)$$

式中, $\phi_1(C)$ 也仅是 C 的函数。倘若再次利用 x 和 r 的对应关系, 可以推论二维等位曲线族 $F(x, y) = C$ 绕 y 轴旋转所得到的曲面族 $F(\sqrt{x^2 + y^2}, y) = C$ 能否成为等位面族, 只需对二维曲线族 $F(x, y) = C$ 进行判断, 其判别条件为

$$\frac{1}{x} \frac{\partial C}{\partial x} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2\right]} = \phi_1(C) \quad (4)$$

如果二维曲线绕 x 轴旋转, 所得旋转曲面族成为等位面的条件为

$$\frac{1}{y} \frac{\partial C}{\partial y} \sqrt{\left[\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial y}\right)^2\right]} = \phi_1(C) \quad (5)$$

将 Smythe 的一般判别式(1)与式(4)和(5)对比可见, 对于这一类对称旋转曲面的判别已大大简化了, 只需对二维函数求一阶导数, 这给实际运算带来很大的方便。

利用推论, 可以非常方便地求解一大类三维势问题。对于一族旋转对称曲面, 它被 xoy 平面所截的曲线族为 $F(x, y) = C$ 。倘若所得到的曲线族构成等位线族, 且满足式(4)或式(5), 则该三维空间的电位问题可化为二维问题来求解。

如 $F(x, y) = C$ 为一族等位线, 则二维问题的解为 $V_1 = f_1(C)$, 设式(4)成立, 则对应的旋转曲面 $F(r, y) = C$ 表示三维等位面。三维势的解 $V = f(C)$, 由式(1)可得

$$f'(C) = A e^{-\int \phi(C) dc} = A e^{-\int G(C) dc - \int \phi_1(C) dc} \quad (6)$$

其中, A 为常数。同样由式(2)可得

$$f'_1(C) = A_1 e^{-\int G(C) dc}$$

将上式代入式(6), 两边对 C 积分得

$$V = \frac{A}{A_1} \left[f_1(C) e^{-\int \phi_1(C) dc} + \int f_1(C) \phi_1(C) e^{-\int \phi_1(C) dc} dC \right] + B \quad (7)$$

由此可知, 欲求满足前面判别条件的三维势分布 V , 只需求出相应二维势 $f_1(C)$, 再利用上式即可。给定两个旋转曲面的电位值, 便可定出式中的常数 A/A_1 和 B 。

2 两个三维场求解的例子

带电导体旋转扁椭球在自由空间的场分布是经典的三维场问题, 一般是在对应的坐标系下解拉氏方程。如果采用本文的方法, 问题将变得非常简单。假如椭球的旋转轴为 y 轴, 如图 1 所示, 则椭球面方程为

$$(x^2 + z^2) / \xi^2 + y^2 / (\xi^2 - 1) = c^2$$

式中, $\xi = a/c$ 。该椭球与 xoy 平面相截的椭圆方程为

$$x^2 / \xi^2 + y^2 / (\xi^2 - 1) = c^2 \quad (8)$$

考虑复变函数 $W = u + jv = \arcsin(Z/c)$, 当 v 取不同值时, 得到一族共焦椭圆

$$x^2 / ch^2 v + y^2 / (ch^2 v - 1) = c^2 \quad (9)$$

在 W 平面内, v 等于常数为一族等位线, 所以

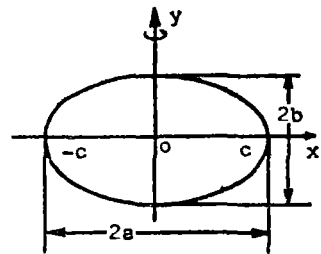


图 1 旋转椭球与 xoy 面相截的椭圆
Fig. 1 Cross section of a oblate spheroid on xoy plane

在Z平面内, 对应的共焦椭圆族也为等位线族. 比较式(8)与(9), 当 $v = \text{Arch}(a/c)$ 时, 二式相同. 因此, 式(8)给出的椭圆为二维等位线族中的一条. 对式(9)中 v 求导数并代入式(4)得

$$\frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial x} / \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{\text{sh}v}{\text{ch}v}$$

则满足判别条件(4), 即 $\phi_1(v) = \text{sh}v/\text{ch}v$, 所以旋转椭球面族构成一族等位面, 从而旋转扁椭球的场分布问题可简化为二维问题. 由于相应二维问题的解可写成

$$f_1 = A_1 v + B_1$$

因此将 $\phi_1(v)$ 和 $f_1(v)$ 代入式(7), 便可求出带电导体扁椭球在自由空间的场分布. 当选取无穷远点为电位参考点, 我们得出

$$V = f(v) = 2A \text{ arc tg } e^v$$

其中, $v = \text{Im} [\text{arc sin}((\sqrt{x^2+z^2} + jy)/c)]$, 电位 V 的表达式与静电场的直接求解的结果一致^[2].

求解自由空间中半无限长细电极的场分布. 实际上, 半无限长细电极与 xoy 面相截为 $x > 0$ 的正半轴表征的裂缝. 图2给出了变换函数 $W = Z^{\frac{1}{2}}$ 将Z平面的裂缝变换到W平面的下半平面的示意图. 展开变换函数可得

$$\begin{aligned} x &= u^2 - v^2 \\ y &= 2uv \end{aligned}$$

v 等于常数代表一族等位线, 因此在Z平面内与此对应的曲线也是等位线. 由上式求出 $\partial v/\partial x$ 和 $\partial v/\partial y$ 代入式(5)得

$$\frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} / \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{v} = \phi_1(v)$$

这便证明了 v 等于常数的曲线族绕 x 轴旋转后得到的曲面族是一族等位面. 由于相应的二维势为 $f_1 = A_1 v + B_1$, 由式(7)可直接求出半无限长细电极的电位分布函数为

$$V = A \ln [\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x] + B$$

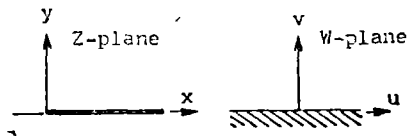


图2 裂缝到下半平面的变换
Fig. 2 Conformal transformation of the gap $x > 0$

3 关于坐标曲面族的判断

图3所示为双极坐标系 (ξ, η) , ξ 和 η 分别满足

$$\begin{aligned} (x - a \coth \xi)^2 + y^2 &= a^2 \text{csch}^2 \xi \\ x^2 + (y - a \text{ctg } \eta)^2 &= a^2 \text{csc}^2 \eta \end{aligned}$$

可以证明, 将变换函数 $W = \ln[(Z + ja)/(Z - ja)]$ 展开后可得到与上式相同的方程, 其中 ξ 和 η 为 W 的实部和虚部, 从而证明了上式 ξ 等于常数和 η 等于常数都可构成等位线族. 当双极坐标绕 x 轴旋转时, 得到双球坐标系; 当绕 y 轴旋转时, 便得到环面坐标系, 由上面第一方程可得

$$\frac{1}{y} \frac{\partial \xi}{\partial y} / \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = - \frac{x}{a}$$

$$\frac{1}{x} \frac{\partial \xi}{\partial x} / \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right] = - \frac{x - a \coth \xi}{a}$$

上面二式的右边皆不仅仅是 ξ 的函数，因此，双球坐标系和环面坐标系中 ξ 坐标面族不能成为等位面族。同样可证这两个坐标系中， η 坐标面族也不能成为等位面族。我们对常用的12种坐标系进行了分析，发现仅有双球坐标和环面坐标系中 ξ 和 η 坐标面族不能成为等位面族（椭球坐标系的判别借助其它判断方法^[1]，其它不具有旋转对称的坐标面族可由保角变换的方法证明可成为等位面族）。

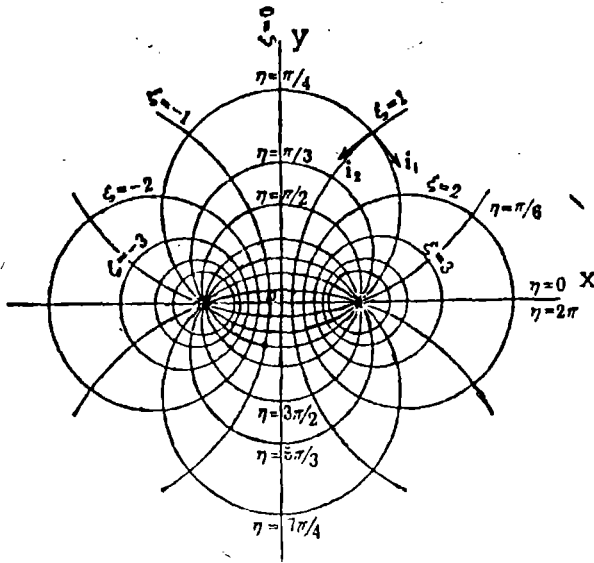


图 3 双极坐标系
Fig. 3 Bipolar coordinates

4 结 论

从前面的分析我们可以得出以下结论：

(1) 判断旋转曲面族 $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = C$ 能否成为等位面族可由一般判别式(1)进行，但运算相当复杂。如果 $F(x, y) = C$ 是等位面族，则可利用式(4)判断，使变量从三维减少到二维，求导数从二阶降到一阶，运算大大简化了。

(2) 对于一个旋转对称的三维问题，如果对应的二维问题可通过保角变换求得，且其等位线方程满足式(4)或(5)，则三维问题退化为二维问题，可由式(7)方便地求解。

(3) 通过分析得知，双球坐标和环面坐标系中 ξ 和 η 坐标面族不能成为等位面族，常用的12种坐标系中的其它坐标面能成为等位面族。无疑，这对正确使用坐标系提供了可靠的依据。

参 考 文 献

- 1 Smythe W R. Static and Dynamic Electricity McGraw-Hill, 1968
- 2 林为干. 微波理论与技术. 北京: 科学出版社, 1979

Criterion of Rotational Surfaces Being Equipotential and Its Applications

Zhu Ninghua Wu Zhengde

Abstract

A simple condition that a set of rotational surfaces can be equipotential is given in this paper. Based on the theory, the corresponding three-dimension potential distribution can be easily found from two-dimension potential distribution. It can be shown that the surfaces, $\xi = \text{constant}$ and $\eta = \text{constant}$, in bispherical and toroidal coordinates cannot be equipotential.

Keywords: equipotential, rotational surfaces, conformal mapping