

论假相当位温的数值计算(二)

陈 创 买

(大气科学系)

摘 要

从大气假绝热方程出发, 提出一个考虑了水汽凝结潜热、水滴冻结潜热和水质物比热对部分位温的贡献的完整假相当位温公式, 并给出它的数值计算过程。

关键词 假相当位温, 熵, 大气假绝热方程, 贝吉龙冰晶效应

对假相当位温 θ_{se} 这一重要变量的计算, 过去由于技术等原因, 只考虑在假绝热过程中水汽凝结潜热的贡献, 而忽略水质物比热和水滴冻结潜热释放的作用。R.H. 辛普森指出了在热带地区考虑水质物比热对 θ_{se} 贡献的重要性^[1]。近年来, ENSO 和大气假绝热可降水的研究^[2,3]都进一步证明, 在 θ_{se} 的计算中考虑水滴冻结潜热的贡献是有意义的。为了对这一贡献作出正确的估计, 首先, 按照用假绝热过程来计算湿空气微团的 θ_{se} 的定义, 在考虑水滴冻结潜热对 θ_{se} 的贡献时, 没有必要对 T_d (露点)或 T_c (抬升凝结高度上温度)加上任何条件的限制, 这恰和拉欣计算 T_c 的情形相反^[4]。其次, 众所周知, 当 $t < 0^\circ\text{C}$ 时, 水滴冻结具有自发性^[5], 即是说, 它们可发生在遍及 0°C 和 -40°C 之间范围内的任一个值上。鉴于目前尚无可靠的不同温度下水滴冻结率资料, 本文假定 T_f 为某一常数。

1 计算公式

1.1 大气假绝热方程

根据艾里本和戈德森^[6]和辛普森^[1]利用熵变化原理可以证明, 发生在一个开放系统中的饱和湿空气微团的假绝热过程的变态方程为

$$(c_{pd} + w_s c_w) d \ln T - R_d d \ln p_d + d(w_s L/T) = 0 \quad (1)$$

其中 $w_s = w_s(p, T)$ 为饱和空气混合比, 它始终是 p 和 T 的函数。

根据罗斯贝(Rossby)部分位温公式^[6]取对数微分, 代入(1)式, 消去 p_d 项, 可得大气假绝热过程变态方程的有用形式

$$(c_w/c_{pd}) w_s d \ln T + d \ln \theta_d + d(w_s L/(c_{pd} T)) = 0 \quad (2)$$

在空气微团发生假绝热变化的气层里对(2)式积分, 得假相当位温的一般表达式

$$\theta'_{se} = \theta_d \exp\left[\frac{w_e L_c}{c_{pd} T_c}\right] \exp\left[\frac{c_w}{c_{pd}} \int_{(p_n, T_n)}^{(p_c, T_c)} w d \ln T\right] = \theta_{se} \exp[M] \quad (3)$$

本文1988年7月15日收到

$$-V_w(p_f, T_f)] = \theta_{se} \exp [B(p_f, T_f, T'_f)] \quad (7)$$

$$\text{其中} \quad B(p_f, T_f, T'_f) = 2V_i(p_f, T'_f) - V_i(p_f, T_f) - V_w(p_f, T_f) \quad (8)$$

称为有贝吉龙过程的水滴冻结贡献指数。如果在(4)式中略去[B]项,则可得考虑水滴冻结,但不考虑在冻结高度上出现的冰水共存时的等焓凝华过程的假相当位温公式

$$\begin{aligned} \theta_{sef} &= \theta_{se} \exp [V_i(p_f, T_f) - V_w(p_f, T_f)] \\ &= \theta_{se} \exp [A(p_f, T_f)] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{其中} \quad A(p_f, T_f) = V_i(p_f, T_f) - V_w(p_f, T_f) \quad (10)$$

称为无贝吉龙过程的水滴冻结贡献指数。在(7)式和(9)式中, θ_{se} 是与水滴冻结潜热的贡献无关的罗斯贝假相当位温, $\exp [B(p_f, T_f, T'_f)]$ 和 $\exp [A(p_f, T_f)]$ 分别为有和无等焓凝华过程的水滴冻结贡献系数(为方便,以下分别简称为系数 $\exp [B]$ 和 $\exp [A]$),

上述方程中的其它参数分别为

$$\left\{ \begin{aligned} L_c &= L_w(T_c); \quad L_w(T_f) = L_0 - c_L(T_f - T_0); \\ L_i(T_f) &= L_0 + L_f - c_f(T_f - T_0); \quad L_i(T'_f) = L_0 + L_f - c_f(T'_f - T_0); \\ w_w(p_f, T_f) &= 0.622 e_w(T_f) / (p_f - e_w(T_f)); \\ w_i(p_f, T_f) &= 0.622 e_i(T_f) / (p_f - e_i(T_f)); \\ w_c &= w_w(p_c, T_c); \quad e_w(T_f) = E(T_f); \\ e_i(T_f) &= E_i(T_f); \quad e_i(T'_f) = E_i(T'_f) \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$T'_f = T_f + \Delta T_f \quad (12)$$

式中 ΔT_f 为在冻结高度上空气微团由水汽等焓凝华产生的增温值^[6],根据推导,它可由如下二元二次方程确定

$$a \Delta T_f^2 + b \Delta T_f + c = 0 \quad (13)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a &= L_i(T_f) c_{p_v} p_f w_i(p_f, T_f) / [R_w T_f^2 (p_f - e_i(T_f))] \\ b &= c_{p_d} + c_{p_v} w_i(p_f, T_f) + [L_i^2(T_f) w_i(p_f, T_f) p_f] \\ &\quad / [R_w T_f^2 (p_f - e_i(T_f))] \\ c &= L_i(T_f) [w_i(p_f, T_f) - w_w(p_f, T_f)] \end{aligned} \right. \quad (14)$$

1.2.2 假设 $T_d < T_f$,则必 $T_c < T_f$,这相当于成雪阶段。因为 $T_c < T_f$,空气微团的温度在尚未到达凝结高度之前就已低于冻结温度,一旦发生凝结便产生凝华,故 T_c 就是冻结温度。为有别于第一种情况,我们将 p_f 和 T_f 分别记为 p_f^* 和 T_f^* ,且 $T_f^* = T_c$, $p_f^* = p_c$ 。

同理我们略去水质物比热项,则(2)式的积分为

$$\int_{\theta_d}^{\theta_{sef}^*} d \ln \theta_d = - \int_{(p_f^*, T_f^*)}^{(p_c^*, T_c^*)} d \left(\frac{wL}{c_{p_d} T} \right) + \int_{(p_n^*, T_n^*)}^{(p_f^*, T_f^*)} d \left(\frac{wL}{c_{p_d} T} \right) = \int_{(p_n^*, T_n^*)}^{(p_c^*, T_c^*)} d \left(\frac{wL}{c_{p_d} T} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_{(p_f^*, T_f^*)}^{(p_f^*, T_f^{*\prime})} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) + \int_{(p_n^*, T_n^*)}^{(p_f^*, T_f^{*\prime})} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) - \int_{(p_n^*, T_n^*)}^{(p_f^*, T_f^*)} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) \\
 & = \int_{(p_f^*, T_f^*)}^{(p_c^*, T_c^*)} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) - \int_{(p_f^*, T_f^*)}^{(p_f^*, T_f^{*\prime})} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) + \int_{(p_n^*, T_n^*)}^{(p_f^*, T_f^{*\prime})} d\left(\frac{wL}{c_{pd}T}\right) \quad (15)
 \end{aligned}$$

我们得到 $T_c < T_f$ 时, 考虑水滴冻结潜热贡献的假相当位温公式

$$\begin{aligned}
 \theta_{sef}^{*\prime} & = \theta_d \exp[w_c L_c / (c_{pd} T)] \exp\left\{2V_i(p_f^*, T_f^{*\prime}) - V_i(p_f^*, T_f^*)\right. \\
 & \quad \left. - V_w(p_f^*, T_f^*)\right\} = \theta_{se} \exp\left\{B(p_f^*, T_f^*, T_f^{*\prime})\right\} \quad (16.a)
 \end{aligned}$$

$$\text{其中 } B(p_f^*, T_f^*, T_f^{*\prime}) = 2V_i(p_f^*, T_f^{*\prime}) - V_i(p_f^*, T_f^*) - V_w(p_f^*, T_f^*) \quad (17.a)$$

同样, 如果在(15)式中略去[B冰面]项, 则得当 $T_c < T_f$ 时考虑水滴冻结的影响, 但不考虑等焓凝华过程的假相当位温公式

$$\begin{aligned}
 \theta_{sef}^{*} & = \theta_{se} \exp\left\{V_i(p_f^*, T_f^*) - V_w(p_f^*, T_f^*)\right\} \\
 & = \theta_{se} \exp\left\{A(p_f^*, T_f^*)\right\} \quad (16.b)
 \end{aligned}$$

其中

$$A(p_f^*, T_f^*) = V_i(p_f^*, T_f^*) - V_w(p_f^*, T_f^*) \quad (17.b)$$

(16)~(17)式在形式上和前(7)~(11)式完全相同, 不同之处在于前者 $T_c > T_f$, 而后者 $T_c < T_f$, 且 $T_f^* = T_c$, 故 $T_f^{*\prime} < T_f$. 其计算过程如图2.

1.3 假相当位温 $\theta_{sef}^{*\prime}$ 的计算过程

考虑了水滴冻结潜热贡献的假相当位温 $\theta_{sef}^{*\prime}$ 的计算, 需根据 p, T, T_d 和 T_f , 首先计算 T_c , $p_c, p_i, \Delta T_f$ 等一系列参数, 最后计算 $\theta_{sef}^{*\prime}$;

1.3.1 计算抬升凝结高度上温度 T_c . T_c 可根据正野重方⁽⁷⁾、别林斯基⁽⁸⁾、Lasheen⁽⁴⁾和陈创买⁽⁹⁾等提出的公式计算之.

1.3.2 计算抬升凝结高度 p_c . 由空气微团的干绝热变化过程, 抬升凝结高度 p_c 由文献

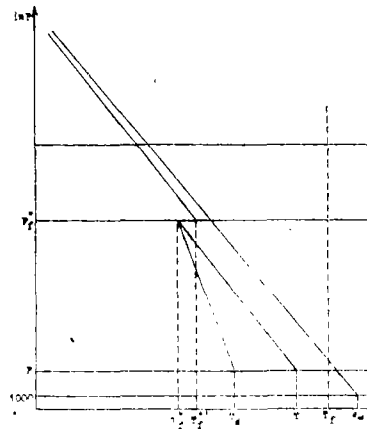


图2 当 $T_c < T_f$ 时, 考虑水滴冻结潜热影响假相当位温计算示意图

Fig.2 The scheme of computation of potential pseudo-equivalent temperature when the effect of latent heat of water droplet freezing is considered while T_c is less than T_f

[7~11]给出。

1.3.3 计算冻结高度 p_f 水滴的冻结发生在当空气微团升过凝结高度后的假绝热过程中,因此,冻结高度 p_f 可根据 p_c, T_c, T_f 参数,用假绝热方程来确定[5]。

$$c_{pd} \ln T_f - R_d \ln p_d + M + wL/T_i = c_{pd} \ln T_c - R_d \ln p_{dc} + w_c L_c/T_c$$

$$\text{令 } Q_1 = c_{pd} \ln T_c - R_d \ln p_{dc} + w_c L_c/T_c; \quad Q_2 = c_{pd} \ln T_f - R_d \ln p_d + M + wL/T_i \quad (18)$$

其中 M 为 $c_w w d \ln T$ 从状态 (p_c, T_c) 到 (p, T_f) 的积分。因为对确定的 p_c 和 T_c, Q_1 为一常数。

对固定的 T_f, Q_2 为 p 的函数, $Q_2 = Q_2(p)$ 。研究发现, $\partial Q_2 / \partial p < 0, \partial Q_2 / \partial T_f > 0$, 即是说, Q_2 随 T_f 增减而增减,但随 p 的增减作相反的变化。因此,对固定的 T_f ,据方程(18)的性质,当 $p = p_f$ 时, $Q_1(p_c, T_c) = Q_2(p_f, T_f)$ 。当 $p > p_f$ 时, $Q_2(p, T_f) < Q_2(p_f, T_f)$,故 $Q_1(p_c, T_c) > Q_2(p, T_f)$;而当 $p < p_f$ 时,因 $Q_2(p, T_f) > Q_2(p_f, T_f)$,故 $Q_1(p_c, T_c) < Q_2(p, T_f)$ 。于是在 (p, T) 平面上(图3),我们可从 A 点按箭号方向沿 B, C, D, E, F, G, H 诸点,根据 $Q_2 \geq Q_1$ 的变化模拟确定 $M(p_f, T_f)$ 点来。显然, $p_f \leq p_c$ 。

1.3.4 计算等焓凝华增值 ΔT_f 在冻结高度上,在等压和绝热条件下发生的冰水共存的等焓凝华贝吉龙过程,使空气微团的温度增加 ΔT_f [6],根据(13)和(14)式,可由如下方程确定之

$$\Delta T_f = (-b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$$

1.3.5 计算罗斯贝假相当位温 θ_{se} 它可用 p, T, T_d, T_c 诸参数按(3a)式计算

1.3.6 计算水滴冻结贡献系数 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 它们可根据 p_f, T_f, T'_f ,首先由(11)式

计算出 $L_i(T'_f), e_i(T'_f), w_i(p_f, T'_f), L_i(T_f), e_i(T_f), w_i(p_f, T_f), L_w(T_f), c_w(T_f), w_w(p_f, T_f)$ 诸参数。再据(17a~b)式计算 $A(p_f, T_f)$,和 $B(p_f, T_f, T'_f)$ 及 $\exp(A)$ 和 $\exp(B)$ 值。

1.3.7 计算假相当位温 θ'_{sef} 和 θ_{sef} 由(7)和(9)式计算。

1.4 水质物比热对假相当位温的贡献

根据(3)式,令 M 代表水质物比热贡献指数,这里仅给出 $R.H.Simpson$ [1]建立的经验方程

$$\hat{M}_s = \exp[1.62 \ln \theta_{se} + 14.3 \ln T_c - 96.0] \quad (19)$$

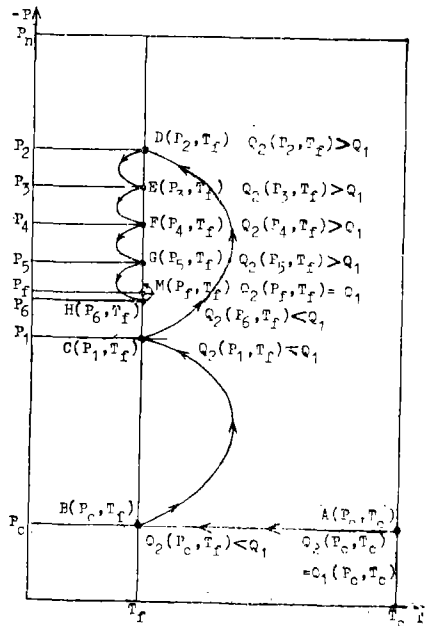


图3 用大气假绝热方程模拟确定冻结高度 p_f 示意图

Fig.3 The scheme in which the pseudo-adiabatic equation of the atmosphere is used to determine the freezing level p_f by means of simulation

1.5 完整假相当位温公式

现在将前面研究的结果归纳如下:

1.5.1 罗斯贝假相当位温 θ_{se} 它可根据(3)式计算。

1.5.2 考虑水滴冻结潜热贡献的假相当位温

$$\theta_{sef} = \theta_{se} \exp(A) \quad (\text{无贝吉龙过程}) \quad (20)$$

$$\theta'_{sef} = \theta_{se} \exp(B) \quad (\text{含贝吉龙过程}) \quad (21)$$

其中, $A = A(p_t, T_t)$, $B = B(p_t, T_t, T'_t)$ 分别由(10)式和(8)式确定。所以, 水滴冻结潜热对假相当位温的净贡献为:

$$\Delta\theta_{sef} = \theta_{sef} - \theta_{se} = \theta_{se} [\exp(A) - 1] \quad (22)$$

$$\Delta\theta'_{sef} = \theta'_{sef} - \theta_{se} = \theta_{se} [\exp(B) - 1] \quad (23)$$

1.5.3 考虑水质物比热贡献的假相当位温

$$\theta_{ses} = \theta_{se} \exp(M) \quad (24)$$

水质物比热对假相当位温的净贡献为

$$\Delta\theta_{ses} = \theta_{ses} - \theta_{se} = \theta_{se} [\exp(M) - 1] \quad (25)$$

1.5.4 完整假相当位温公式 考虑水滴冻结潜热和水质物比热两项贡献之后,

$$\theta_{sest} = \theta_{se} \exp(A) \exp(M) \quad (\text{无贝吉龙过程}) \quad (26)$$

$$\theta'_{sest} = \theta_{se} \exp(B) \exp(M) \quad (\text{含贝吉龙过程}) \quad (27)$$

水滴冻结潜热和水质物比热对 θ_{se} 的总净贡献:

$$\Delta\theta_{sest} = \theta_{sest} - \theta_{se} = \theta_{se} [\exp(A) \exp(M) - 1] \quad (\text{无贝吉龙过程}) \quad (28)$$

$$\Delta\theta'_{sest} = \theta'_{sest} - \theta_{se} = \theta_{se} [\exp(B) \exp(M) - 1] \quad (\text{含贝吉龙过程}) \quad (29)$$

〔例1〕 当 $T_t = -5^\circ\text{C}$ 时完整假相当位温计算

观测资料: $p = 1000\text{hPa}$, $t = 28.2^\circ\text{C}$, $t - t_d = 2.4^\circ\text{C}$,

计算结果: $T_c = 298.98^\circ\text{K}$, $p_c = 965.9\text{hPa}$, $\theta_{se} = 365.01^\circ\text{K}$, $\Delta T_t = 0.34^\circ\text{K}$, $p_t = 426.9\text{hPa}$. 水质物比热贡献部分: $M = 0.00725113$, $\exp(M) = 1.00727749$, $\theta_{ses} = 367.67^\circ\text{K}$, $\Delta\theta_{ses} = 2.66^\circ\text{K}$. 水滴冻结潜热贡献部分: $A = 0.00430894$, $\exp(A) = 1.00431824$, $\theta_{sef} = 366.59^\circ\text{K}$, $\Delta\theta_{sef} = 1.58^\circ\text{K}$, $B = 0.0078603$, $\exp(B) = 1.00789201$, $\theta'_{sef} = 367.89^\circ\text{K}$, $\Delta\theta'_{sef} = 2.88^\circ\text{K}$. 水质物比热和水滴冻结潜热总贡献部分: $\theta_{sest} = 369.26^\circ\text{K}$, $\Delta\theta_{sest} = 4.24^\circ\text{K}$, $\theta'_{sest} = 370.57^\circ\text{K}$, $\Delta\theta'_{sest} = 5.56^\circ\text{K}$.

2 初步结论

(1) 考虑了水滴冻结潜热和水质物比热影响的完整假相当位温(26)~(27)式, 全面地描述了在大气的不可逆假绝热变化过程中各项因素的贡献和归缩。它是可被计算出来的。

(2) 完整假相当位温比罗斯贝假相当位温更富于保守性。

(3) 完整假相当位温可以将水汽凝结潜热、水质物比热和水滴冻结潜热各项因素对假相当位温的贡献严格区分开来, 可以分别估计它们的作用的大小, 分析它们的性质。

参 考 文 献

- [1] Simpson R H, *Mon. Wea. Rev.*, 106(1978), 1, 124~130
- [2] 刘家铭, 大气科学, 9(1985), 1, 1~8
- [3] J L H 保罗赫斯等著, 可能最大降水(PMP)估算手册, 湖南水利电力勘测设计院, 长沙, 1975
- [4] Lasheen A M, *Inter. Trop. Meteor.*, Part II(1974), 1~4
- [5] J V 艾里巴和W L 戈德森著, 大气热力学, 中国人民解放军空军气象学校训练部, 1978, 84~112
- [6] Rossby C G, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 83(1938), 4, 342~350
- [7] 正野重方著(吴伯雄译), 动力气象学, 科学出版社, 北京, 1960, 31~80
- [8] B A 别林斯基著(仇永炎译), 动力气象学(上册), 高等教育出版社, 北京, 1956, 61~124
- [9] 陈创买等著, 气象常用参数和物理量查算表, 气象出版社, 北京, 1980, 1~60
- [10] JI C 刚金著(陈绍猷译), 动力气象学基础(上册), 高等教育出版社, 北京, 1958, 87~140
- [11] Byers H R, *General Meteorology*, McGraw-Hill book company, New York, 1974, 104~140

On the Numerical Computation of Potential Pseudo-Equivalent Temperature(II)

*Chen Chuangmai**

Abstract

With the starting from the pseudo-adiabatic equation of the atmosphere, a complete formula of potential pseudo-equivalent temperature is developed in which the contribution by latent heat of vapour condensation and that of water droplet freezing also by specific heat of water substances to the partial potential temperature of the atmosphere has been considered, and the procedure of numerical computation of this formula is given as well.

Keywords potential pseudo-equivalent temperature. entropy, pseudo-adiabatic equation of the atmosphere, Bergeron's ice effect

* Department of Atmospheric Sciences