中山大学学报(自然科学版)
第28卷 第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.4
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

星像函数积分算子

朱玉灿

(数学系)

摘 要

设 $Sn(\rho)$表示 $\rho(\rho<1)$ 阶星像函数 $f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots$ 的全体所成的集，本文主要研究定义在 $Sn(\rho)$上的积分算子的性质，得到的结果推广了 S. S. Miller 等人相应的工作。

关键词 星形函数，积分算子

设 n 为正整数，用 N_n 表示在 $U=\{z:|z|<1\}$ 内解析，且具有如下展式的全体函数：

$$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots,\quad z\epsilon U.$$

设 $\rho<1$，令

$$S_n(\rho)=\{f:f\epsilon N_n \text{ 且 } \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>\rho,\quad z\epsilon U\}$$

简记 $S_n^*=S_n(0)$，$S^*=S_1^*$.

本文主要考虑一类积分算子的性质，它推广了 S. S. Miller 等人相应的结果。

引理 1 设 $R>0$，$w(z)=b_nz^n+b_{n+1}z^{n+1}+\cdots$ 在 $|z|<R$ 内解析且 $w\not\equiv 0$。若有 $z_0=r_0e^{i\theta_0}(0<r_0<R)$使

$$|w(z_0)|=\max_{|z|\le r_0}|w(z)|$$

则存在实数 $m\geqslant n$，使 $z_0w'(z_0)=mw(z_0)$。

这引理可由[1]中的引理 A 得知。

定理 1 设 $\rho<1$，$\sigma<1$，$\lambda<1$，$\alpha\geqslant 0$，$\eta\geqslant 0$，及 $\beta>0$，且 $\alpha+\delta=\beta+\gamma$。如果存在 $J\geqslant 0$ 使

$$\operatorname{Re}\gamma+\beta>J\geqslant\operatorname{Re}\gamma+\rho\beta$$

当 $f\epsilon S_n(\lambda)$，$g\epsilon S_n(\sigma)$，且

$$\alpha\lambda+\eta\sigma\geqslant J-\operatorname{Re}\gamma+\alpha-\beta+\eta-\frac{2nJ(\operatorname{Re}\gamma+\beta-J)}{[|\gamma+\beta|+|\beta+2(\operatorname{Re}\gamma-J)-\gamma|]^2}\tag{1}$$

$$F(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f(t)^{\alpha}g(t)^{\eta}t^{\delta-\eta-1}dt\right]^{1/\beta}\tag{2}$$

本文1988年1月24日收到

则 $F\epsilon S_n(\rho)$，其中幂函数均取主值，以下一样不再说明。

证明 设 $\mu=(1-\lambda)\alpha+(1-\sigma)\eta$

1） 如果 $\alpha=\eta=0$，则 $F(z)\equiv z$。

2） 如果 $\alpha>0$ 或者 $\eta>0$，则 $\mu>0$。记

$$h(z)=z\left[\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\eta}\right]^{1/\mu}$$

则 $h\epsilon N_n$，且

$$\operatorname{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}>0,\quad z\epsilon U \tag{3}$$

记 $G(z)=\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma+\beta}}\int_0^z\left(\frac{h(t)}{t}\right)^{\mu}t^{\beta+\gamma-1}\mathrm{d}t$，则 G 在 U 内解析，且 $G(0)=1$。

令 $k=\operatorname{Re}\gamma+\beta-J$，及 $q(z)=\frac{1}{k}\left[\frac{zG'(z)}{G(z)}+\operatorname{Re}\gamma+\beta-J\right]$，则 $k>0$，$q(0)=1$，q在U 内亚纯，且

$$\mu\frac{zh'(z)}{h(z)}=J-\beta-\operatorname{Re}\gamma+\mu+kq(z)+\frac{kzq'(z)}{kq(z)+J+\gamma-\operatorname{Re}\gamma} \tag{4}$$

设 $q(z)=(1+w(z))/(1-w(z))$，则 w 在 U 内亚纯，且 $z=0$ 点附近，有

$$w(z)=C_nz^n+C_{n+1}z^{n+1}+\cdots$$

如果存在 $\zeta\epsilon U$ 使$|w(\zeta)|\geqslant1$，则存在 $R>0$ 和 $|z_0|<R<1$，使 w 在 $|z|<R$ 内解析，且 $1=|w(z_0)|=\max\limits_{|z|\leqslant|z_0|}|w(z)|$。由引理1知：存在实数 $m\geqslant n$，使 $z_0w'(z_0)=mw(z_0)$，记$w(z_0)=e^{i\theta}$，则

i） 当 $\theta=0$ 或 $\theta=2\pi$，则 $z_0w'(z_0)=m$，由(4)式两边乘 $z-z_0$ 且令 $z\to z_0$，得 $\frac{2k}{m}+1=0$ 矛盾。

ii） 当 $0<\theta<2\pi$时，由(4)式得：

$$\mu\operatorname{Re}\frac{z_0h'(z_0)}{h(z_0)}\leqslant J-\beta-\operatorname{Re}\gamma+\mu-\frac{2nkJ}{[|\beta+\gamma|+|\beta+2(\operatorname{Re}\gamma-J-\gamma|]^2}\leqslant0$$

与(3)式矛盾。

综合 i)与 ii)知：q 在 U 内解析，且 $\operatorname{Re}q(z)>0$，$z\epsilon U$。于是G在U内没有零点。从而 $F(z)=z[G(z)]^{1/\beta}$在U内解析，且 $F\epsilon N_n$，

$$\operatorname{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}=1+\frac{1}{\beta}\operatorname{Re}\frac{zG'(z)}{G(z)}>\rho,\qquad z\epsilon U$$

即 $F\epsilon S_n(\rho)$。

注 1 当 $n=1$，$\eta=0$时，由定理1可得到[2]中的定理1。

系 1 在定理1假设下，如果 $\operatorname{Re}\gamma+\rho\beta\geqslant0$，且

$$\alpha\lambda+\eta\sigma\geqslant\rho\beta+\alpha-\beta+\eta-\frac{2n(1-\rho)\beta(\operatorname{Re}\gamma+\rho\beta)}{[|\gamma+\beta|+|\beta(1-2\rho)-\gamma|]^2}$$

当 $f\epsilon S_n(\lambda)$，$g\epsilon S_n(\sigma)$ 且(2)式成立，则 $F\epsilon S_n(\rho)$。

系 2 在定理1假设下，如果 $-\beta\rho\leqslant\gamma\leqslant\beta(1-2\rho)$ 和 $\alpha\lambda+\eta\sigma\geqslant\beta\rho+\alpha-\beta+\eta-\dfrac{n(\gamma+\beta\rho)}{2(1-\rho)\beta}$ 或者 $\gamma>\beta(1-2\rho)$ 和 $\alpha\lambda+\eta\sigma\geqslant\rho\beta+\alpha-\beta+\eta-\dfrac{n(1-\rho)}{2(\gamma+\beta\rho)}\beta$，当 $f\epsilon S_n(\lambda)$，$g\epsilon S_n(\sigma)$，且(2)式成立。则有 $F\epsilon S_n(\rho)$。

注 2 当 $n=1$ 时，得到〔3〕中的定理4。当 $n=1$，$\alpha=\beta$，$\eta=0$，$\lambda=\rho=0$ 时，得到〔4〕中的定理2。

定理 2 设 $\alpha\geqslant0$，$\eta\geqslant0$，$\lambda<1$，$\rho<1$，$\sigma<1$，$\beta>0$，且 $\alpha+\delta=\beta+\gamma$，函数 $\Phi(z)=1+\cdots$，$\phi(z)=1+\cdots$，在 U 内解析，且 $\Phi(z)\phi(z)\neq0$，$z\epsilon U$。如果存在常数 J 满足：$\operatorname{Re}\gamma+\beta>J\geqslant0$，且在 U 内有

$$\beta\rho+\operatorname{Re}\gamma+\operatorname{Re}\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\leqslant J\leqslant\alpha\lambda+\operatorname{Re}\delta-(1-\sigma)\eta+\operatorname{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$$
$$+\frac{2nJ(\beta+\operatorname{Re}\gamma-J)}{[|\gamma+\beta|+|\beta+2(\operatorname{Re}\gamma-J)-\gamma|]^2}$$

当 $f\epsilon S_n(\lambda)$，$g\epsilon S_n(\sigma)$，且

$$F(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\Phi(z)}\int_0^z f(t)^{\alpha}g(t)^{\eta}\phi(t)t^{\delta-\eta-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}$$

则 $F\epsilon S_n(\rho)$。

证明 设 $\mu=(1-\lambda)\alpha+(1-\sigma)\eta$，则

1）如果 $\alpha>0$ 或 $\eta>0$，则 $\mu>0$。令

$$h(z)=z\left[\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\alpha}\left(\frac{g(z)}{z}\right)^{\eta}\right]^{1/\mu}$$

$$G(z)=\frac{\beta+\gamma}{z^{\beta+\gamma}\Phi(z)}\int_0^z\left(\frac{h(t)}{t}\right)^{\mu}\phi(t)t^{\gamma+\beta-1}\mathrm{d}t$$

则 $h\epsilon S_n^*$，G 在 U 内解析，且 $G(z)=1+a_nz^n+\cdots$，$z\epsilon U$。令

$k=\operatorname{Re}\gamma+\beta-J$，$p(z)=\dfrac{1}{k}\left[\dfrac{zG'(z)}{G(z)}+\dfrac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}+\operatorname{Re}\gamma+\beta-J\right]$，则

$$\mu\frac{zh'(z)}{h(z)}=J-\beta-\operatorname{Re}\gamma+\mu+kp(z)+\frac{kzp'(z)}{kp(z)+J+\gamma-\operatorname{Re}\gamma}-\frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$$

与定理1一样可知：$F\epsilon S_n(\rho)$。

2）如果 $\alpha=\eta=0$，记

$$p(z)=(1+w(z))/(1-w(z))$$

则 w 在 U 内亚纯，且在 $z=0$ 附近 $w(z)=C_nz^n+C_{n+1}z^{n+1}+\cdots$。

i）如果存在 $\zeta\epsilon U$ 使 $|w(\zeta)|\geqslant1$，则由定理1的证明过程和调和函数的最小值原理知：

$F(z)=z\left[\dfrac{1}{\Phi(z)}\right]^{1/\beta}$，从而 $F\epsilon S_n(\rho)$。

ii）如果对任何 $z\epsilon U$，$|w(z)|<1$，则 $P(z)$ 在 U 内解析，且 $\operatorname{Re}P(z)>0$，$z\epsilon U$，从而 $F\epsilon S_n(\rho)$。

注 3　当 $n=1$，$\eta=0$，得到比〔2〕中定理2更一般的结论。

系 3　在定理2假设下且 $\eta=0$，δ，γ 都是实数。如果存在常数J满足：

$$\gamma+\beta>J\geqslant 0$$

$$\rho\beta+\gamma+\mathrm{Re}\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\leqslant J\leqslant\lambda\alpha+\delta+\mathrm{Re}\frac{z\phi'(z)}{\phi(n)}+M(J),\ z\in U$$

其中 $M(0)=0$，$M(J)=\frac{n}{2}\min\left\{\frac{\beta+\gamma-J}{J},\ \frac{J}{\beta+\gamma-J}\right\}$　$(J>0)$，且 $f\in S_n(\lambda)$，及

$$F(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\Phi(z)}\int_0^z f(t)^{\alpha}\phi(t)t^{\delta-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}$$

则 $F\in S_n(\rho)$。

引理 2　设 $\rho<1$，$P(z)=1+C_nz^n+\cdots$在U内解析，且 $\mathrm{Re}\,P(z)>\rho$，$z\in U$，则当 $|z|=r<1$ 时

$$\frac{1+(2\rho-1)r^n}{1+r^n}\leqslant\mathrm{Re}\,p(z)\leqslant\frac{1-(2\rho-1)r^n}{1-r^n},$$

$$|\mathrm{Im}\,p(z)|\leqslant\frac{2(1-\rho)r^n}{1-r^{2n}}.$$

定理 3　设 $\rho<1$，$\sigma<1$，$\lambda<1$，$\rho_0<1$，$\sigma_0<1$，$\alpha\geqslant 0$，$\eta\geqslant 0$，$\beta>0$ 且 $\alpha+\delta=\beta+\gamma$。如果存在 $J\geqslant 0$ 使

$$\mathrm{Re}\,\gamma+\beta>J\geqslant\mathrm{Re}\,\gamma+\rho\beta,$$

当 $f\in S_n(\lambda)$，$g\in S_n(\sigma)$，且

$$\alpha\lambda+\eta\sigma\geqslant J-\mathrm{Re}\,\gamma+\alpha-\beta+\eta-\frac{2nJ(\mathrm{Re}\,\gamma+\beta-J)}{[|\gamma+\beta|+|\beta+2(\mathrm{Re}\,\gamma-J)-\gamma|]^2}$$

$h\in S_n(\sigma_0)$，及

$$F(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{h(z)^{\gamma}}\int_0^z f(t)^{\alpha}g(t)^{\eta}t^{\delta-\eta-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}$$

则 $\frac{F(r_0z)}{r_0}\in S_n(\rho_0)$，此处 r_0 为下列方程的最小正根：

1) 当 $\mathrm{Re}\,\gamma\geqslant 0$ 时，$Q_1(r)\equiv\beta(1-\rho_0)-2[\beta(1-\rho)+\mathrm{Re}\,\gamma(1-\sigma_0)+|\mathrm{Im}\,\gamma|(1-\sigma_0)r^n]$
$-[\beta(2\rho-1)-\rho_0\beta+2\,\mathrm{Re}\,\gamma(1-\sigma_0)]r^{2n}=0,$

2) 当 $\mathrm{Re}\,\gamma<0$ 时，$Q_2(r)\equiv\beta(1-\rho_0)-2[\beta(1-\rho)-\mathrm{Re}\gamma(1-\sigma_0)+|\mathrm{Im}\gamma|(1-\sigma_0)]r^n$
$-[\beta(2\rho-1)-\rho_0\beta+2\,\mathrm{Re}\,\gamma(1-\sigma_0)]r^{2n}=0.$

证明　记

$$G(z)=\left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f(t)^{\alpha}g(t)^{\eta}t^{\delta-\eta-1}\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}$$

则由定理1知：$G\in S_n(\rho)$，且

$$\mathrm{Re}\frac{zF'(z)}{F(z)}=\mathrm{Re}\frac{zG'(z)}{G(z)}+\frac{\mathrm{Re}\gamma}{\beta}-\frac{\mathrm{Re}\gamma}{\beta}\mathrm{Re}\frac{zh'(z)}{h(z)}+\frac{\mathrm{Im}\gamma}{\beta}\mathrm{Im}\frac{zh'(z)}{h(z)}$$

由引理3知：当 $|z|=r<1$ 时

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zF'(z)}{F(z)}-\rho_0\right]\geqslant\begin{cases}\dfrac{Q_1(r)}{\beta(1-r^{2n})}, & \text{当 } \mathrm{Re}\,\gamma\geqslant 0 \text{ 时,}\\[2ex] \dfrac{Q_2(r)}{\beta(1-r^{2n})}, & \text{当 } \mathrm{Re}\,\gamma<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

由于 $Q_1(0)=Q_2(0)=\beta(1-\rho_0)$，且 $Q_1(1)=-4\mathrm{Re}\,\gamma(1-\sigma_0)-|\mathrm{Im}\gamma|(1-\sigma_0)$和$Q_2(1)=-2|\mathrm{Im}\,\gamma|(1-\sigma_0)$知：方程 $Q_1(r)=0$ 与 $Q_2(r)=0$ 在 (0，1〕内有根，记其最小正根为 r_0，则当 $|z|<r_0$ 时

$$\mathrm{Re}\,\frac{zF'(z)}{F(z)}>0$$

即 $\frac{1}{r_0}F(r_0z)\in S_n(\rho_0)$.

注 4 从定理 3 立即可推出〔3〕中的定理 2 与定理 3，且比它们更一般化。

参 考 文 献

〔1〕 Miller S S et al., *J. Math. Anal. Appl.*, 65 (1978), 289～305

〔2〕 邹中柱，黑龙江大学（自然科学）学报，1985，2（增刊），52～61

〔3〕 林和曾，数学学报，28(1985)，470～477

〔4〕 Miller S S et al., *Pacific J. Math.*, 79(1978), 157～168

Starlike Integral Operators

*Zhu Yucan**

Abstract

Let N_n be the class of analytic functions of the form

$$f(z)=z+a_{n+1}z^{n+1}+a_{n+2}z^{n+2}+\cdots,\qquad |z|<1$$

Let $S_n(\rho)=\{f\in N_n$ and $\mathrm{Re}\,\frac{zf'(z)}{f(z)}>\rho,\quad |z|<1,\quad \rho<1\}$.

We study properties of integral operators defined on $S_n(\rho)$.

Keywords Starlike functions, integral operators

* Department of Mathematics