中山大学学报(自然科学版)
第28卷 第4期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.4
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

·研究简报·

组合映射零点存在的一个条件

高堂安

(计算机科学系)

摘 要

利用连续同伦算法讨论具有形式$F(x)=x+f(x)$的组合映射$F: R^n\to R^n$的零点的计算，其中f是二阶连续可微映射，给出了F零点存在的一个条件，在此条件下，本文给出的算法是整体收敛的。

关键词 组合映射，连续同伦算法，零点

给定映射 $F:R^n\to R^n$为

$$F(x)=x+f(x) \tag{1}$$

其中f是二阶连续可微映射，则称F是组合映射。为了说明方便，本文假设F是光滑映射，所得的结论对F是二阶连续可微的情形也成立。

设$G:R^n\to R^m$是光滑映射，称$y\in R^m$是G的正则值，如果对任意$x\in G^{-1}(y)$，G在x处的Jacobi矩阵满秩。

定理1[1] 设$G:R^n\times R^m\to R^p$是光滑映射，0是G的正则值，$p\le n$，则对几乎所有$a\in R^m$，0是$G(\cdot,a):R^n\to R^p$的正则值。

设光滑映射F如(1)，为求F的零点，构造映射$G:R^n\times[0,1]\times R^n\to R^n$，

$$G(x,t,a)=tF(x)+(1-t)(x-a),$$

则$G(x,0,a)=x-a$，$G(x,1,a)=F(x)$。因当$t\neq 1$时G对a的Jacobi矩阵满秩，所以，0是映射G在区域$R^n\times[0,1)\times R^n$上的正则值. 根据定理1，对几乎所有$a\in R^n$，0是$x-a$与$F(x)$之间同伦$H:R^n\times[0,1]\to R^n$，

$$H(x,t)=tF(x)+(1-t)(x-a) \tag{2}$$

在区域$R^n\times[0,1)$上的正则值，从而据原象定理[2]有

引理2 设H如(2)，则对几乎所有$a\in R^n$，限制在$R^n\times[0,1)$上，$H^{-1}(0)$是一维光滑流形，并且$H^{-1}(0)$的边界点均位于$R^n\times\{0,1\}$上。

条件3[1)] 设$F(x)=x+f(x)$如(1)满足：对任意正实数q成立

$$\lim_{\substack{x_i\to\infty \\ x_j\ q,j\neq i}} f_i(x)/x_i>-1.$$

本文1988年6月25日收到

1) 吉林大学数学所张德统的博士论文. 他在讨论两点边值问题解的存在性时对方程的右端项提出了类似的条件

注意，条件3对f_n的要求最强，f_n几乎是有界函数，而对f_1的要求最弱，f_1高度非线性，从f_n到f_1，对函数的要求逐次减弱。

定理4　设F如(1)。如果F满足条件3，则映射F至少存在一个零点，并且这个零点可用连续同伦算法求得。

证明　设H如(2)，先证$H^{-1}(0)$有界。若不然，设$H^{-1}(0)$无界，则可从$H^{-1}(0)$中取到点列$\{(x(k),\ t(k))\}_{k=1}^{\infty}$，使得当$k\to\infty$时$x(k)\to\infty$。因为

$$H_i(x(k),\ t(k))=x_i(k)+t(k)f_i(x(k))-(1-t(k))a_i=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

不妨设诸$x_i(k)$非零，上式两边同除$x_i(k)$得

$$1+t(k)f_i(x(k))/x_i(k)-(1-t(k))a_i/x_i(k)=0,\quad i=1,\cdots,n,$$

注意到条件3，当$k\to\infty$时，上面n个等式中必有一个不成立，引出矛盾。因此$H^{-1}(0)$有界，从而据引理2，对几乎所有$a\in R^n$，$H^{-1}(0)$是一维光滑流形，$H^{-1}(0)$中从$(a,0)$出发的曲线必与$R^n\times\{1\}$相交，记交点为$(x',1)$，则$F(x')=0$。

注　为了定理的证明方便，条件3中要求映射f_i排列得非常整齐，实际上只要求诸f_i和诸x_i经过调整后满足条件3，此时定理的结论仍成立。

例　设　$F(x)=x+f(x):R^3\to R^3$，其中映射f为

$$f_1(x)=x_1+x_2^2+\exp(x_3)+0.1,$$
$$f_2(x)=x_2x_3^2+x_3\sin(x_2)+0.1,$$
$$f_3(x)=x_3+\sin(x_3)/(x_1^2+x_2^2+1)+0.1.$$

我们按[3]的框图编写程序，利用上面的同伦可求得F的一个零点为

$$(-15.5609608,\ -3.81520176,\ -0.99614083８E-01).$$

参考文献

[1] Chow S N et al., *Math. Comput.*, 32(1978), 887～899

[2] Naber G L, *Topological Methods in Euclidean Spaces*, Cambridge Univ. Press, 1980

[3] Li T Y et al., in *Analysis and Computation of Fixed Points*, eds. S. M. Robinson, Academic Press, New York, 1980

A Sufficient Condition for Existence of Zeroes of Combinatorial Mappings

*Gao Tangan**

Abstract

This paper discusses how to approximate zeroes of a class of combinatorial mappings $F:\ R^n\to R^n, F(x)=x+f(x)$ with homotopy continuation method, where $f\in C^2$ A sufficient condition is given to guarantee the existence of a zero of the mapping. Under this condition, the algorithm given converges globally.

Keywords　combinatorial mapping, homotopy continuation method, zero

* Department of Computer Science