中山大学学报(自然科学版)
第28卷 第2期 1989年
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.28 №.2 (1989)

·研究简报·

一类算子发展方程的强解及其Galerkin逼近

陈仲英

(计算机科学系)

摘 要

讨论一类带有对时间二阶微商算子发展方程的强解的存在性、唯一性及Galerkin逼近.

关键词 算子发展方程,强解,Galerkin方法

设H,V,W均为可分的Hilbert空间,$W\subset V\subset H$,且W到V和V到H的嵌入是紧的。$\{A(t);\ t\in[0,T]\}$和$\{B(t);\ t\in[0,T]\}$为两族定义于W上而取值于H中的线性或非线性算子。考虑如下的发展方程初边值问题

$$-\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}=A(t)u(t)+B(t)u(t) \tag{1}$$

$$u(0)=u_0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u(0)}{\mathrm{d}t}=u_1 \tag{3}$$

作如下基本假设

(H_1) $A(t)$,$B(t)$为$H^2(0,T;W)\to H^1(0,T;H)$的线性或非线性算子。对任一$t\in[0,T]$,若$\{v_k(t)\}$于W中弱收敛于$v(t)$,$\left\{\frac{\mathrm{d}v_k(t)}{\mathrm{d}t}\right\}$于$V$中弱收敛于$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$,则$\{A(t)v_k(t)\}$和$\{B(t)v_k(t)\}$分别于$H$中弱收敛于$A(t)v(t)$和$B(t)v(t)$。若$\{v_k(t)\}$于$L^\infty(0,T;W)$中弱$*$收敛于$v(t)$,$\left\{\frac{\mathrm{d}v_k(t)}{\mathrm{d}t}\right\}$于$L^\infty(0,T;V)$中弱$*$收敛于$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}$,则$\{A(t)v_k(t)\}$和$\{B(t)v_k(t)\}$于$L^2(0,T;H)$中弱收敛于$A(t)v(t)$和$B(t)v(t)$。

(H_2) 对任意常数$R>0$,存在$L_1,L_2>0$使得

$$\|A(t)v(t)\|_H\leqslant L_1,\qquad \|B(t)v(t)\|_H\leqslant L_2,$$

$$\forall v(t)\in H^2(0,T;W);\ \|v(t)\|_W,\ \left\|\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right\|_V\leqslant R,\ t\in[0,T].$$

(H_3) $u_0\in W,u_1\in V$.

(H_4) 存在有界线性算子$K:W\to H$,K的一串特征元$\{w_j\}$($Kw_j=\lambda_jw_j,j=1,2,\cdots$)构成$W$中的一个完全系,并有常数$r,\alpha_0>0$使得

$$\|Kv\|_H\leqslant r\|v\|_W,\qquad \forall v\in W,$$

本文1987年11月18日收到

$$\mathrm{Re}(A(t)v,\ Kv)_H \geqslant \alpha_0 \|v\|_W^2, \quad \forall v \in W,\ t \ni [0,T].$$

(H₅) 存在常数$\alpha_1 > 0$，$M_1, C_1, C_2 \geqslant 0$使得

$$\mathrm{Re}\int_0^t (A(t)v,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})_H \mathrm{d}t \geqslant \alpha_1 \|v\|_V^2 - C_1,$$

$$\mathrm{Re}\int_0^t (B(t)v,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})_H \mathrm{d}t \geqslant -M_1 \int_0^t (1 + \|v\|_V^2 + \|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\|_H^2)\mathrm{d}t - C_2,$$

$$\forall v \in H^2(0,T;W), \quad \|v(0)\|_W \leqslant \|u_0\|_W, \|\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}\|_V \leqslant \|u_1\|_V.$$

(H₆) 对任意常数$L > 0$，有$\alpha_2 > 0, M_2, C_3, C_4 \geqslant 0$使得

$$\mathrm{Re}\int_0^t (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A(t)v, \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2})_H \mathrm{d}t \geqslant \alpha_2 \|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\|_V^2 - C_3,$$

$$\mathrm{Re}\int_0^t (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B(t)v, \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2})_H \mathrm{d}t \geqslant -M_2 \int_0^t (1 + \|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\|_V^2 + \|\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2}\|_H^2)\mathrm{d}t - C_4,$$

$$\forall v \in H^2(0,T;W), \|v(0)\|_W \leqslant \|u_0\|_W, \|\frac{\mathrm{d}v(0)}{\mathrm{d}t}\|_V \leqslant \|u_1\|_V, \|v\|_V, \|\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\|_H \leqslant L.$$

问题(1)～(3)的Galerkin近似为：求$u_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i(t) w_i$ 使得

$$-(\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2}, w_i)_H = (A(t)u_n + B(t)u_n, w_i)_H \tag{4}$$

$$(u_n(0), w_i)_W = (u_0, w_i)_W \tag{5}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_n(0)}{\mathrm{d}t}, w_i\right)_V = (u_1, w_i)_V, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

用常微分方程Caratheodory定理可证

命题 1 若(H_1)～(H_3)成立，则问题(4)～(6)有至少在$t=0$的右邻近有定义的解$u_n(t)$。

对$u_n(t)$进行估计并用延拓定理可得

命题 2 若(H_1)～(H_6)成立，则问题(4)～(6)有定义在$[0,T]$上的解$u_n(t)$且

$$\|u_n(t)\|_W, \|\frac{\mathrm{d}u_n(t)}{\mathrm{d}t}\|_V, \|\frac{\mathrm{d}^2 u_n(t)}{\mathrm{d}t^2}\|_H \leqslant C,$$

其中C为与n无关的常数。

据致密性原理可得

命题 3 若(H_1)～(H_6)成立，则问题(4)～(6)的解$\{u_n(t)\}$有子列$\{u_{n_i}(t)\}$使得

$\{u_{n_i}\}$在$L^\infty(0,T;W)$中弱＊收敛于$u(t)$，在$C([0,T];V)$中强收敛于$u(t)$；

$\left\{\frac{\mathrm{d}u_{n_i}}{\mathrm{d}t}\right\}$在$L^\infty(0,T;V)$中弱＊收敛于$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$，在$C([0,T];H)$中强收敛于$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$；

$\left\{\frac{\mathrm{d}^2 u_{n_i}}{\mathrm{d}t^2}\right\}$在$L^\infty(0,T;H)$中弱＊收敛于$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2}$。

定义 1 称$u(t)$为问题(1)～(3)的强解，如果它满足下列条件

1° $u(t) \in L^\infty(0,T;W) \cap C([0,T];V)$，$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \in L^\infty(0,T,V) \cap C([0,T];H)$，

$\frac{d^2u}{dt^2}\in L^\infty(0,T;H)$。

2° $u(0)=u_0$, $\frac{du(0)}{dt}=u_1$。

3° $\int_0^T\left(\frac{d^2u}{dt^2}+A(t)u+B(t)u,v\right)_H dt=0,\quad \forall v\in C([0,T];H)$。

定理 1 若$(H_1)\sim(H_6)$成立，则问题(1)～(3)存在定义 1 意义下的强解。

为了得到强解的唯一性，需要下面的假设：

(H_7) 存在常数$\alpha>0$和$M\geqslant 0$使得

$$\mathrm{Re}\int_0^t\left(A(t)u-A(t)v,\frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt}\right)_H dt\geqslant\alpha\|u-v\|_V^2,$$

$$\mathrm{Re}\int_0^t\left(B(t)u-B(t)v,\frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt}\right)_H dt\geqslant -M\int_0^t\left(\|u-v\|_V^2+\left\|\frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt}\right\|_H^2\right)dt,$$

$$\forall u,v\in H^2(0,T;W)\cap C([0,T];V),\quad u(0)=v(0)=u_0,\ \frac{du(0)}{dt}=\frac{dv(0)}{dt}=u_1.$$

定理 2 若$(H_1)\sim(H_7)$成立，则问题(1)～(3)有唯一的强解。

注 若$A(t)=A$为与t无关的线性算子，$\frac{d}{dt}A=A\frac{d}{dt}$，则条件$(H_5)$，$(H_6)$，$(H_7)$中的第一式可以简化为如下条件：存在常数$\alpha,M>0$使得

$$\alpha\|v\|_V^2\leqslant\mathrm{Re}(Av,v)_H\leqslant M\|v\|_V^2$$

$$\forall v\in H^2(0,T;W)\ \|v(0)\|_W\leqslant\|u_0\|_W,\ \left\|\frac{dv(0)}{dt}\right\|_V\leqslant\|u_1\|_V.$$

上述框架和所得结果适用于若干数学物理发展方程和方程组的初边值问题，例如文〔2〕,〔3〕中所讨论的问题。

参 考 文 献

〔1〕 陈仲英等，中山大学学报（自然科学版），1988，2,47-54

〔2〕 郭柏灵等，中山大学学报（自然科学版），1985，3，54—61

〔3〕 Guo Boling, *Scientia Sinica*, 26 (1983),561—575

The Strong Solution for a Class of Operator Evolution Equations with Second-order Derivative with Respect to Time

*Chen Zhongying**

Abstract

We discuss the strong solution for a class of operator evolution equations with second-order derivative with respect to time. The existence and uniqueness of the strong solution are obtained.

Keywords operator evolution equation, strong solution, Galerkin method

*Department of Computer Science