中山大学学报（自然科学版）
第30卷 第2期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.30 №.2
1991年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1991

σ可见点，绝不可见点和可见支集

周 健 伟

（数学系）

摘 要

本文放宽对 σ 域族 $(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$ 的条件，讨论了随机点和可见点的若干性质，提出了σ 可见点和绝不可见点的概念，引进了稀疏集的可见支集的概念，证明了点过程μ 的负荷集的可见支集就是〔2〕中的$\sigma(\mu)^c$。

关键词 σ可见点，绝不可见点，可见支集，点过程

在研究一般空间上的点过程时，Hoeven〔1，2〕提出的点过程产生的外 σ 域族上的可见性理论是有用的。本文指出，随机点和可见点的概念可以对满足较宽条件的σ域族引进，并讨论了它们的若干性质。本文内还提出了σ可见点和绝不可见点的概念，讨论了随机点的分解；在〔2〕的假设下，引进了稀疏集的可见支集的概念，证明了点过程μ的负荷集的可见支集就是〔2〕中的 $\sigma(\mu)^c$。

1 随机点和可见点的若干性质

设 $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ 为完备概率空间，N 为$\mathscr{A}$中 P 零集全体。$(U, \mathscr{B})$ 为可测空间，Δ 为U外一点。给定$\mathscr{A}$的一个子σ域族$(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$满足下述条件：

i) 当V，$W\in\mathscr{B}$，$V\subset W$ 时，有$\mathscr{F}(V)\supset\mathscr{F}(W)$；ii) $\mathscr{F}(U)\supset N$。

例如，〔1，2〕中由点过程产生的外σ域族就满足上述条件。记 $\mathscr{F}=\mathscr{F}(\phi)$。

定义 1 称$\mathscr{F}$可测映射 R：$\Omega\to U\cup\{\Delta\}$ 为随机点。称〔R〕$=\{(\omega, u)\,|\,u=R(\omega)\in U\}$ 为 R 的图。对随机点 R，定义

$$\mathscr{F}(R)=\sigma\{F\cap(R\in V)\mid F\in\mathscr{F}(V),\ V\in\mathscr{B}\},$$

称为R的外σ域，这里约定$(R\in\phi)=(R=\Delta)$。

定理 1 设 R 为随机点，则

1) R 为$\mathscr{F}(R)$可测；2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则$A\cap(R=\Delta)\in\mathscr{F}(R)$。

证明是显然的。

定义 2 设 R 为 $\Omega\to U\cup\{\Delta\}$ 的一个映射，$A\subset\Omega$。令 $R_A(\omega)=R(\omega)$，当 $\omega\in A$；$R_A(\omega)=\Delta$，当 $\omega\in A^c$。称 R_A 为 R 到 A 上的局限。

定理 2 设 R 为随机点，$A\in\mathscr{F}$，则 1) R_A也是随机点；2) $A\cap\mathscr{F}(R_A)=A\cap\mathscr{F}(R)$，特别 $(R=\Delta)\cap\mathscr{F}=(R=\Delta)\cap\mathscr{F}(R)$；3) $A^c\cap\mathscr{F}(R_A)=A^c\cap\mathscr{F}$。

证明从略。

本文1989年9月19日收到

定义 3　随机过程是指实值$\mathscr{A}\times\mathscr{B}$可测函数 $X:\Omega\times U\to(-\infty,\infty)$，即$X:(\omega,u)\to X_u(\omega)$。对一切 $\omega\in\Omega$，令 $X_\Delta(\omega)=0$。若 X 为一随机过程，R 为一随机点，则 X_R 定义为 $X_R(\omega)=X_{R(\omega)}(\omega)$。

定义 4　令$\mathscr{Z}=\sigma\{F\times V|V\in\mathscr{B},F\in\mathscr{F}(V)\}$，称为可见 σ域。$\mathscr{Z}$中集合称为**可见集**。关于$\mathscr{Z}$可测的随机过程称为可见过程。随机点 Z称为可见点，若$[Z]$是可见集。

定理 3　设 R 为随机点，用 $f_R(\omega)=(\omega,R(\omega))$ 定义 $\Omega\to\Omega\times(U\cup\{\Delta\})$的映射$f_R$，则$\mathscr{F}(R)=f_R^{-1}(\mathscr{Z})$。此外有 $f_R^{-1}(A)=\pi(A\cap[R])$，凡 $A\in\mathscr{F}\times\mathscr{B}$，这里 π 表示$\Omega\times U$到Ω 的投影算子。

这是〔2〕的引理 5.3.1，但注意，其证明没有用到 U 为局部紧有可数基的 Hausdorff 空间 及$(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$ 由点过程产生。本节中凡引用〔2〕中结果均 注意此点，不再一一说明。

定理 4　设 R 为一随机点，则对任何可见过程 X，X_R 为 $\mathscr{F}(R)$可测。反之，设ξ为一$\mathscr{F}(R)$可测实值函数，则存在一可见过程X，使得 $X_RI_{(R\in U)}=\xi I_{(R\in U)}$。

证明　前半部分用〔2〕定理5.3.5后的注 1．后半部分由本文定理 3 和复合函数定理即可得。

定理 5　1) 设 R 为随机点，Z 为 可 见 点，则 $\mathscr{F}(Z)\cap(Z=R\in U)\subset\mathscr{F}(R)$，特 别 $(Z=R\in U)\in\mathscr{F}(R)$；

2) 设 R 为随机点，$A\in\mathscr{F}$。若 R_A 为可见点，则 $A\in\mathscr{F}(R)$；

3) 设 Z 为可见点，$F\in\mathscr{F}(Z)$，则 Z_F 为可见点；

4) 设 Z 为可见点，Y 为$\mathscr{F}(Z)\times\mathscr{B}$可测过程，则 $YI_{[Z]}$为可见过程。

证明　1) 和 3) 分别见〔2〕中引理5.3.3和5.3.2。

2) 令 $X=I_{[R_A]}$，则 X 为可见过程。由定理 4，$I_{A\cap(R\in U)}=X_{R_A}$ 为 $\mathscr{F}(R_A)$ 可 测，即 $A\cap(R\in U)\in\mathscr{F}(R_A)$，再用定 理 2 得 $A\cap(R\in U)\in\mathscr{F}(R)$。但 由 定 理 1，$A\cap(R=\Delta)\in\mathscr{F}(R)$，因此 $A\in\mathscr{F}(R)$。

4) 只要考虑$Y=I_{A\times V}$，$A\in\mathscr{F}(Z)$，$V\in\mathscr{B}$ 的情形，这时由 3)，$\{(\omega,u)|YI_{[Z]}=1\}=(A\times U)\cap[Z]\cap(\Omega\times V)\in\mathscr{Z}$，故 $YI_{[Z]}$为可见过程。

下面两个定理的证明与〔3〕定理4.32和4.33类似，故从略。

定理 6　设 A 为一可见集，且含于一列可见点图的并，则 A是一列可见点图的并。

定理 7　设A 为一列随机点（相应地，可见点）图的并，则存在一列随机点（相应地，可见点）(R_n)，使当 $n\neq m$ 时，$[R_n]\cap[R_m]=\phi$，且 $A=\bigcup_n[R_n]$。

2　σ可见点和绝不可见点

本节的概念和结果受到R_+上可及时和绝不可及时概念和结果的启发[3]。

定义 5　设 T 为随机点。称 T 为 σ 可见点，若存在一列可见点(T_n)，使得$[T]$ $a.s.$ 含于$\bigcup_n[T_n]$中，或等价地 $P(\bigcup_n[T_n=T\in U])=P(T\in U)$。称 T 为绝不可见点，若对一切可见点 S，$[T]\cap[S]$ 为不足道集，或等价地，$P(T=S\in U)=0$。

显然，可见点为 σ 可见点；既 σ 可见又绝不可见的随机点 $a.s.$ 等于Δ。

定理 8 设 T 为 σ 可见点（相应地，绝不可见点），则对一切 $A\in\mathscr{F}$，T_A 为 σ 可见点（相应地，绝不可见点）。

证明是显然的。

定理 9 设 A 为一列 σ 可见点（相应地，绝不可见点）图的并，则存在一列 σ 可见点（相应地，绝不可见点）(R_n)，使当 $n\neq m$ 时，$[R_n]\cap[R_m]=\phi$，且 $A=\bigcup\limits_n[R_n]$。

证明类似于定理 7。

定理10 设 R 为一随机点，则存在 $A\subset(R\in U)$，$A\in\mathscr{F}(R)$，使得 R_A 为 σ 可见点，R_{A^c} 为绝不可见点。这样的集合 A 本质上是唯一确定的。

证明 令 $\mathscr{H}$ 为 $\mathscr{F}(R)$ 中形如 $\bigcup\limits_n(Z_n=R\in U)$ 的集合全体，其中 (Z_n) 为一列可见点。$\mathscr{H}$ 显然对可列并运算封闭，故存在 $A\in\mathscr{H}$，使 $A=\mathrm{ess.sup}\ \mathscr{H}$（[3]定理1.23 的注）。易知 R_A 为 σ 可见点，R_{A^c} 为绝不可见点。A 的唯一性不难验证。

定理11 设 R 为随机点，则 R 为 σ 可见点，当且仅当对一切绝不可见点 T，有 $P(R=T\in U)=0$。

证明 必要性显然。往证充分性，用定理10，设 R_A 为 σ 可见点，R_{A^c} 为绝不可见点，由假设 $P(R_{A^c}=R\in U)=0$，故 $R_{A^c}=\Delta$ a.s.，从而 $R=R_A$ a.s.，R 为 σ 可见点。

3 稀疏集及其可见支集

定义 6 若 $A\in\mathscr{A}\times\mathscr{B}$，则称 A 为随机集。称随机集 A 为稀疏集，若存在一列随机点 (R_n)，使得 $A=\bigcup\limits_n[R_n]$（由定理 7，可取 (R_n) 使它们的图两两不交）。若上述 (R_n) 都是 σ 可见点（相应地，绝不可见点），则称 A 为 σ 可见集（相应地，绝不可见集）。

这个定义受到 $\Omega\times R_+$ 上稀疏集定义的启发[4,5]。但注意当 $U=R_+$ 时，这里的稀疏集定义与[4，5]并不一致。

引理 1 1）可列个稀疏集的并是稀疏集；2）两个稀疏集的差是稀疏集。

证明 1）为显然。往证2）。设 $A=\bigcup\limits_n[R_n]$，$B=\bigcup\limits_n[S_n]$，其中 (R_n)，(S_n) 为两列随机点。令 $D_n=\bigcap\limits_K(R_n\neq S_K)\in\mathscr{F}$，则 $A\backslash B=\bigcup\limits_n[(R_n)_{D_n}]$ 为稀疏集。

引理 2 设 A 为稀疏集，且含于一列 σ 可见点图的并，则 A 是一列 σ 可见点图的并。

证明 设 $A\subset\bigcup\limits_n[Z_n]$，其中 (Z_n) 为一列 σ 可见点。由定义 6 及定理10得

$$A=(\bigcup_n[S_n])\cup(\bigcup_n[T_n])\subset\bigcup_n[Z_n],$$

其中 (S_n) 为一列 σ 可见点，(T_n) 为一列绝不可见点。将此式两边与 $\bigcup\limits_n[T_n]$ 作交，由定理11得 $\bigcup\limits_n[T_n]=\phi$，故 $A=\bigcup\limits_n[S_n]$。证毕。

从现在开始，与在[2]中那样，设 U 和 K 都是局部紧有可数基的Hausdorff空间，$\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{K}$ 分别是 U 和 K 中的Borel σ 域，μ 是 $U\times K$ 上一个固定的随机点过程，$(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$ 是 μ 产生的外 σ 域族。令 $\xi(\cdot)=\mu(\cdot\times K)$，$\hat{\xi}_u(\omega)=\xi_\omega(\{u\})$。其余未加说明的术语和记号，均按[2]。

定理12　设 A 为稀疏集，则存在唯一的可见稀疏集 $\tilde{A}$，使得 1) $A\backslash\tilde{A}$ 为绝不可见集；2) 若 Z 为可见点，且 $[Z]\cap A=\phi$，则 $[Z]\cap\tilde{A}=\phi$。称 $\tilde{A}$ 为 A 的可见支集。

证明　由定义6和定理10，存在一列可见点 (Z_n)，使得

$$A\subset(\bigcup_n[R_n^i])\cup(\bigcup_n[Z_n]),$$

其中 R_n^i 为 R_n 的绝不可见部分。令

$B_n=\text{ess. inf}\{B\in\mathscr{F}(Z_n)\,|\,B\supset\{\omega|(\omega,\ Z_n(\omega))\in A\}\}$，则 $B_n\in\mathscr{F}(Z_n)$，由定理5，$(Z_n)_{B_n}$ 仍为可见点。令 $\tilde{A}=\bigcup_n[(Z_n)_{B_n}]$，则 $\tilde{A}$ 为可见稀疏集，且 $A\backslash\tilde{A}=\bigcup_n[R_n^i]$ 为绝不可见集。设 Z 为可见点，且 $[Z]\cap A=\phi$。则由定理5和1，$(Z=Z_n)\in\mathscr{F}(Z_n)$，而 $(Z=Z_n)\cap\{\omega|(\omega,\ Z_n(\omega))\in A\}=\phi$，因此 $(Z=Z_n)^c\supset B_n$，$(Z=Z_n)\cap B_n=\phi$，所以 $[Z]\cap\tilde{A}=\phi$。

最后证 $\tilde{A}$ 的唯一性。设可见稀疏集 A' 也满足1)和2)。若 $\tilde{A}\backslash A'$ 非不足道，则由可见截口定理[2]，存在可见点 Z，使得 $[Z]\subset\tilde{A}\backslash A'$，$[Z]$ 非不足道。由于 $[Z]\cap A'=\phi$，$A\backslash A'$ 为绝不可见集，因此 $[Z]\cap A=\phi$，从而 $[Z]\cap\tilde{A}=\phi$，这与 $[Z]\subset\tilde{A}\backslash A'$ 及 $[Z]$ 非不足道矛盾，故 $\tilde{A}\backslash A'$ 为不足道集。同理可证 $A'\backslash\tilde{A}$ 为不足道集，因此 $\tilde{A}=A'$。

推论　设 A 为稀疏集，$\tilde{A}$ 为其可见支集，则 1) A 为绝不可见集等价于 $\tilde{A}=\phi$；2) A 为可见集等价于 $A=\tilde{A}$。且这时 A 可表为两两不交的可见点图的可列并；3) A 为 σ 可见集等价于 $A\subset\tilde{A}$。且这时 A 可表为两两不交的 σ 可见点图的可列并。

证明　1)为显然。2)中的等价关系为显然，后一结论可由定理12的证明和定理7得到。3)的证明是类似的。

定理13　设 (A_n) 为一列稀疏集，$\tilde{A}_n$ 为 A_n 的可见支集，则 $\bigcup_n\tilde{A}_n$ 是 $\bigcup_n A_n$ 的可见支集。

证明　不难直接验证 $\bigcup_n\tilde{A}_n$ 满足可见支集的定义。

注　显然，定理12，推论和定理13只要在 $(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$ 使可见截口定理成立的条件下就能成立，而不一定要满足[2]中假设。

引理3　设 ρ 为 U（相应地，$U\times K$）上 $\mathscr{F}$ 可测的随机测度，则 ρ 的负荷集 $A(\rho)=\{(\omega,\ u)|\widehat{\rho_u}(\omega)\neq0\}$ 为稀疏集。

这是[2]引理5.4.1的推广，证明从略。

定理14　设 μ^z 和 ξ^z 分别是 μ 和 ξ 的可见对偶投影，则 μ 的负荷集 $A(\mu)=\{(\omega,\ u)|\widehat{\xi_u}(\omega)=1\}$ 的可见支集 $\tilde{A}(\mu)=\{(\omega,\ u)|\widehat{\xi_u^z}(\omega)\neq0\}$。

证明　令 $J=\{(\omega,\ u)|\widehat{\xi_u^z}(\omega)\neq0\}$。若 $J\backslash\tilde{A}(\mu)$ 非不足道，则存在图非不足道的可见点 Z，使得 $[Z]\subset J\backslash\tilde{A}(\mu)$。由[2]定理5.5.2.

$$\xi^z(Z)=E(\xi(Z)|\mathscr{F}(Z)),\ a.s. \tag{1}$$

而由 $[Z]\cap(A(\mu)\backslash\tilde{A}(\mu))=\phi$ 及 $[Z]\subset\tilde{A}(\mu)^c$ 知 $[Z]\cap A(\mu)=\phi$，即 $\xi(Z)=0$。故由(1)式得 $\xi^z(Z)=0$，即 $[Z]\cap J=\phi$。这与 $[Z]\subset J\backslash\tilde{A}(\mu)$ 及 $[Z]$ 非不足道矛盾。

若 $\tilde{A}(\mu)\backslash J$ 非不足道，则存在图非不足道的可见点 Z，使得 $[Z]\subset\tilde{A}(\mu)\backslash J$。由 $\xi^z(Z)=0$ 及(1)式得 $E\xi(Z)=0$，故 $\xi(Z)=0$，$a.s.$ 即 $[Z]\cap A(\mu)=\phi$。由可见支集定

义，〔Z〕$\cap\tilde{A}(\mu)=\phi$，这与〔Z〕$\subset\tilde{A}(\mu)\backslash J$ 及〔Z〕非不足道矛盾。

注 不难验证 $\tilde{A}(\mu)$ 满足〔2〕定理6.2.1中 $\sigma^c=\sigma(\mu)^c$ 的条件，即〔2〕中的 σ^c 事实上就是 μ 的负荷集的可见支集。而〔2〕中的条件(σ)成立意味着 μ 的负荷集为绝不可见集。

定理15 $L(\mu)=\{(\omega,u)\mid\widehat{\xi_u^z}(\omega)=1\}$是包含在$A(\mu)=\{(\omega,u)\mid\widehat{\xi}_u(\omega)=1\}$中的最大可见集。

证明 若可见点 Z 使〔Z〕$\subset L(\mu)$，则 $E\xi(Z)=E\xi^z(Z)=P(Z\epsilon U)$。由 $0\leqslant\xi(Z)\leqslant 1$ 可知在$(Z\epsilon U)$上 $\xi(Z)=1$，即〔Z〕$\subset A(\mu)$。故 $L(\mu)\subset A(\mu)$。

设可见集 $H\subset A(\mu)$，往证 $H\subset L(\mu)$。设若不然，$H\backslash L(\mu)$ 非不足道，则存在可见点 Z，使〔Z〕$\subset H\backslash L(\mu)$，〔Z〕非不足道。但由 $H\subset A(\mu)$ 及（1）式得 $\xi^z(Z)=I_{(Z\epsilon U)}$，即〔Z〕$\subset L(\mu)$，这与〔Z〕$\subset H\backslash L(\mu)$及〔Z〕非不足道矛盾。故$H\subset L(\mu)$，即 $L(\mu)$ 是包含在 $A(\mu)$中的最大可见集。

注 不难验证 $L(\mu)$满足〔2〕定理6.1.1中Σ^c 的条件，即〔2〕中的Σ^c 事实上就是包含在 μ 的负荷集中的最大可见集。

参 考 文 献

〔1〕 Hoeven P C T *van der*, *Z. W.*, 61(1982), 483～499

〔2〕 Hoeven P C T *van der*, *On Point Processes*, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983

〔3〕 严加安，鞅与随机积分引论，上海科学技术出版社，1981

〔4〕 何声武等，数学进展，13(1984)，266～289

〔5〕 Jacod J, Calcul Stochastique et Problémes de Martingales, *Lect. Notes in Math.*, 714, Springer-Verlag, Berlin, 1979

σ-Visible Points, Totally Invisible Points and Visible Support

*Zhou Jianwei**

Abstract

In this paper, let $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ be a complete probability space, $(U, \mathscr{B})$ be a measurable space and $(\mathscr{F}(V))_{V\in\mathscr{B}}$ be a family of sub-σ-fields of $\mathscr{A}$ such that $\mathscr{F}(V)\supset\mathscr{F}(W)$ for $V\subset W$ and $\mathscr{F}(U)$ contains all P-null sets in $\mathscr{A}$.

Some properties of random points and visible points are discussed. The concepts of σ-visible points and totally invisible points are proposed. Under the assumption of 〔2〕, the concept of visible support of a minced set (i. e. a countable union of graphs of random points) is introduced. It is proved that the visible support of the set $\{(\omega, u)\mid\mu_\omega(\{u\}\times K)=1\}$ is $\sigma(\mu)^c$ in 〔2〕.

Keywords σ-visible points, totally invisible points, visible supports, point processes

* Department of Mathematics