

比斜法有理样条插值*

黎 罗 罗

(计算机科学系)

摘 要

本文给出了比斜法有理样条的构造、误差分析和数值试验例子。

关键词 有理二次样条, 保形插值

1 引 言

设有区间 $[a, b]$ 的一个分划:

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (1)$$

及数据

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \quad (2)$$

对 $i = 1, 2, \dots, n$ 记 $\delta_i = y_i - y_{i-1}$, $h_i = x_i - x_{i-1}$, $\tau_i = \delta_i/h_i$.

不失一般性, 保形插值的提法是: 设数据(2)满足条件

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n \quad (3)$$

欲求函数 $S(x) \in C^1[a, b]$ 满足 $S(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) 且在 $[a, b]$ 上保持单调性及凸性。

物理、化学实验数据往往在某个局部呈有理多项式曲线(例如双曲线)状的走向, 在奇点附近数据陡升(降)。对这类数据, 通常的三次样条插值常产生多余拐点及振荡, 而采用有理样条则比较合理。

本文考虑有理二次样条。一般地, 关于数据(2)的插值有理二次样条可分段表为

$$S(x) = y_{i-1} + \tau_i h_i t + (m_{i-1} - \tau_i) h_i t(1-t)/(1 + r_i t), \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (4)$$

其中, $t = (x - x_{i-1})/h_i$ 。控制参数 m_{i-1} 表示 $S'(x_{i-1}+)$, $r_i \geq 0$ 。关于有理二次样条 $S(x)$ 有如下基本事实。

命题 1 $S(x) \in C^1[a, b]$ 当且仅当

$$(m_i - \tau_i)(1 + r_i) = \tau_i - m_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (5)$$

这又当且仅当在每一子区间 $[x_{i-1}, x_i]$:

本文1988年7月4日收到

• 国家自然科学基金资助项目

$$\begin{aligned} m_{i-1} &= m_i = 0 && \text{若 } \tau_i = 0 \\ (m_{i-1}/\tau_i, m_i/\tau_i) &\in M && \text{若 } \tau_i \neq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $M = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 < \min\{\xi, \eta\} < 1 < \max\{\xi, \eta\}\} \cup \{(1, 1)\}$.

式(5)表明, 对于 C^1 光滑的有理二次插值样条, 也可用节点处的导数为控制参数. 以下总设 $S(x) \in C^1[a, b]$.

命题 2 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 单调、无拐点的充分必要条件是(6).

命题 3 设数据(2)满足条件 $\tau_i > 0$

(i) $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 严格单调且下凸的充分必要条件是

$$(m_{i-1}/\tau_i, m_i/\tau_i) \in M_1 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \xi < 1 < \eta\};$$

(ii) $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 严格单调且上凸的充分必要条件是

$$(m_{i-1}/\tau_i, m_i/\tau_i) \in M_2 = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq \eta < 1 < \xi\}.$$

命题 2 及 3 的证明用到 $S(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 二阶导数的表达式

$$S''(x) = -2(m_{i-1} - \tau_i)(1 + r_i) / [h_i(1 + r_i)^3] \quad (7)$$

以及 $S''(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 的单调性与保号性.

有理二次样条用于保形插值的文献可参考[1]~[4]. 文[5]提出一种构造分片三次局部 τ -样条的比斜法, 这种 τ -样条在条件

$$0 < (h_i + h_{i+1})/h_i < 3 \quad (8)$$

下保持数据内蕴的单调性与凸性. 易于实现, 适用于陡升(降)数据. 本文提出的比斜法有理样条插值可不受(8)的限制.

2 比斜法有理样条插值

用 $[\xi, \eta]g$ 表示函数 g 的差商: $(g(\eta) - g(\xi)) / (\eta - \xi)$. 当 $[x_{i-2}, x_i]g \neq 0$ 时, 下式

$$[x_{i-2}, x_{i-1}]g \cdot [x_{i-1}, x_i]g / [x_{i-2}, x_i]g \quad (9)$$

可看作是差商 $[x_{i-1}, x_i]g$ 受到比斜因子 $[x_{i-2}, x_{i-1}]g / [x_{i-2}, x_i]g$ 的校正. 当 g 是有理函数 $g(x) = \alpha + \beta / (x + r)$, $r \in [x_{i-2}, x_i]$ 时, 式(9)恰能精确表示 $g'(x_{i-1})$. 基于此, 当数据(2)满足条件(3)时, 建议用比斜校正作为有理二次插值样条(4)的控制参数. 即令

$$m_{i-1} = \tau_i \tau_{i-1} (h_{i-1} + h_i) / (\delta_{i-1} + \delta_i) \quad i = 2, \dots, n \quad (10)$$

在端点处则采用满足条件

$$0 \leq m_0 < \tau_1, \quad m_n > \tau_n \quad (11)$$

的控制参数, 例如, 可用

$$m_0 = \tau_1^2 (x_2 - x_0) / (y_2 - y_0); \quad m_n = \tau_n^2 (x_n - x_{n-2}) / (y_n - y_{n-2}) \quad (12)$$

上述参数(通过(5))用到(4)中, 我们便构造了关于数据(2)的比斜法有理样条.

命题 4 设数据(2)符合条件(3), 按比斜法构造有理二次插值样条如上, 则

(i) $S(x) \in C^1[a, b]$;

(ii) $S(x)$ 在 $[a, b]$ 严格单调上升且下凸.

证明 为说明结论 (i) 以及 S 在每一小区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 严格单调上升且下凸, 只须说明 $(m_{i-1}/\tau_i, m_i/\tau_i) \in M_1$. 由 (11) 知 $m_0/\tau_1 < 1, m_n/\tau_n > 1$. 由 (10) 及合比不等式可推知

$$m_{i-1}/\tau_i < 1 \quad (i = 2, \dots, n); \quad m_i/\tau_i > 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

于是 $(m_{i-1}/\tau_i, m_i/\tau_i) \in M_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$.

$S(x)$ 在整个 $[a, b]$ 的严格单调上升、下凸是因为由 $m_0 < \tau_1 < m_1 < \dots < \tau_n < m_n$, 可证得 S'' 在 $[a, b]$ 保号 (参看式 (7)).

3 误差分析

本节设函数 $g(x) \in C^3[a, b]$, 严格下凸且在 $[a, b]$ 上 $g'(x) > 0$, 对 $g(x)$ 作分划 Δ 上的比斜法有理插值样条 $S(x)$.

定理 1 若 (i) $S(x)$ 的边界控制参数取如 (12); (ii) 分划 Δ 满足网比有界条件:

$$h/\underline{h} \leq \text{const}, \quad h = \max\{h_i\}, \quad \underline{h} = \min\{h_i\}$$

则有误差估计

$$\|S - g\|_p = O(h^{2+1/p}) \tag{13}$$

其中

$$\|\cdot\|_p = \left[\int_a^b w(x) |\cdot|^p dx \right]^{1/p},$$

$w(x)$ 是 $[a, b]$ 上的恒正权函数.

证明 由积分中值定理, 对 $i = 1, 2, \dots, n$ 存在 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} w(x) |S(x) - g(x)|^p dx = h_i w(\eta_i) |S(\eta_i) - g(\eta_i)|^p \tag{14}$$

又由 $e(x) := S(x) - g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 二次可微, 且 $e(x_{i-1}) = e(x_i) = 0$ 知存在 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 使得

$$e(x) = (x - x_{i-1})(x - x_i)e''(\xi_i)/2$$

记 $\alpha_i = m_{i-1}/\tau_i - 1, \beta_i = m_i/\tau_i - 1, g'_i = g'(x_i), g''_i = g''(x_i)$, 则有

$$r_i = -(\alpha_i + \beta_i)/\beta_i \tag{15}$$

$$e''(x) = 2\tau_i \alpha_i^2 / [h_i \beta_i (1 + r_i t)^3] - g''(x) \tag{16}$$

其中 $t = (x - x_{i-1})/h_i$. 另外, 由 (10) 并用 Taylor 展开方法, 得

$$\alpha_i = -g''_{i-1} h_i / (2g'_{i-1}) + O(h^2) = -g''_i h_i / (2g'_i) + O(h^2), \quad (i = 2, \dots, n) \tag{17}$$

$$\beta_i = g''_{i-1} h_i / (2g'_{i-1}) + O(h^2) = g''_i h_i / (2g'_i) + O(h^2), \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \tag{18}$$

于是, 对于 $x \in [x_0, x_1], t = (x - x_0)/h_1$, 有

$$S''(x) = 2(m_0 - \tau_1)^2 / [h_1(m_1 - \tau_1)(1 + r_1 t)^3] \tag{19}$$

由 (12) 知, $\alpha_1 = m_0/\tau_1 - 1 = m_1/\tau_2 - 1 = \alpha_2$, 故在条件 (ii) 之下, 根据 (17)、(18) 可推知 $S''(x)$ 在区间 $[x_0, x_1]$ 有界, 从而 $e''(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 有界. 这样, 当 $i = 1$ 时, (14) 右端有估计: $hO(h^{2p})$.

同理, $i = n$ 时, (14) 右端有估计: $hO(h^{2p})$.

对于 $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 2, \dots, n-1$, 由

$$|e''(x)| \leq |2\tau_i \alpha_i^2 - h_i \beta_i (1 + r_i t)^3 g''(x)| / |h_i \beta_i|$$

及
$$g''(x) = g''_{i-1} + O(h)$$

连同(15)、(17)、(18)整理后, 可知在 $[x_{i-1}, x_i]$ 有 $|e''(x)| = O(h)$, 从而对 $i = 2, \dots, n-1$, 式(14)右端有估计: $hO(h^{3p})$.

最后由 $\|\cdot\|_p$ 的定义得到(13). 证毕.

定理 2 将定理 1 的条件(ii)改为等距分划则有误差估计

$$\|S - g\|_p = O(h^3) \quad (20)$$

证明 这时, 由(17)、(18)可知

$$r_1 = -(\alpha_1 + \beta_1)/\beta_1 = -(\alpha_2 + \beta_1)/\beta_1 = O(h) \quad (21)$$

对 $x \in [x_0, x_1]$ 有:

$$|e''(x)| \leq |2\tau_1 \alpha_2^2 - h\beta_1(1 + r_1 t)^3 (g''_1 + O(h))| / |h\beta_1|$$

由(17)、(18)及(21)知在 $[x_0, x_1]$ 有 $|e''(x)| = O(h)$, 所以对 $i = 1$, 式(14)右端有估计: $hO(h^{3p})$.

同理, 对 $i = n$, 式(14)右端有估计: $hO(h^{3p})$.

其余同定理 1. 最后由 $\|\cdot\|_p$ 的定义得(20). 证毕.

定理 3 将定理 1 中条件(i)、(ii)改为: $S(x)$ 边界控制参数 m_0, m_n 符合

$$g'(a) \leq m_0 < \tau_1 \quad (22)$$

$$g'(b) \leq m_n \quad (23)$$

则有误差估计

$$\|S - g\|_p = O(h^{2+1/p}) \quad (24)$$

证明 对于 $x \in [x_0, x_1]$, 由(19)、(22) 及 $\tau_1 = g'_0 + g''_0 h_1/2 + O(h^2)$ 可推知 $S''(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 有界, 从而 $e''(x)$ 有界.

同理, 可推知 $S''(x)$, 从而 $e''(x)$ 在 $[x_{n-1}, x_n]$ 有界.

其余同定理 1. 故最后可得(24). 证毕.

注 1 在上述定理中, 网比有界可减弱为 $h_2/h_1, h_n/h_{n-1}$ 有界; 等距分划可减弱为 $h_1 = h_2, h_{n-1} = h_n$.

注 2 对于数据(2)的下列情形(见表 1), 比斜法有理样条插值的构造与性质以及误差分析的讨论是类似的. 除边界外, 控制参数取如(10).

表1 数据的其它情形

Tab.1 Other cases of data sets

情形	边界控制参数
1. $\tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n > 0$ 数据值严格单调上升, 上凸	$m_0 > \tau_1$ $\tau_n > m_n \geq 0$
2. $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < 0$ 数据值严格单调下降, 下凸	$m_0 < \tau_1$ $\tau_n < m_n \leq 0$
3. $0 > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n$ 数据值严格单调下降, 上凸	$0 \geq m_1 > \tau_1$ $\tau_n > m_n$

4 数值试验

例1 模型函数 $g(x) = 1/x^2$, $x \in [0.1, 2]$

如[5], 只是如下5个数据的取法稍有不同:

$i = 0$	1	2	3	4
$x_i = 0.1$	0.2	0.6	1	2
$y_i = 100$	25	2.77778	1	0.25

这组数据属于注2中的情形2. 边界条件取精确值 $m_0 = g'_0 = -2000$, $m_4 = g'_4 = -0.25$, 插值曲线见图1.

在同样边界条件下, 如用[5]的 τ -样条插值上述数据, 则 τ -样条在 $[x_1, x_2]$ 不能保持单调(原因是(8)不满足), 相对误差也较大.

各子区间上最大相对误差的比较见表2.

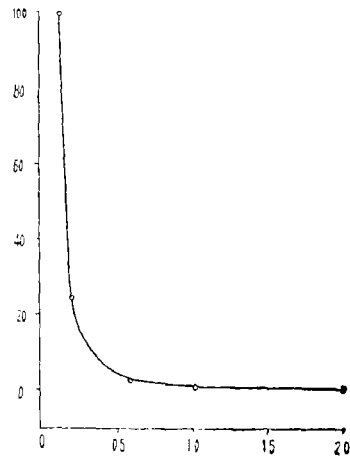


图1
Fig. 1

表2 子区间上最大相对误差(%)

Tab.2 Maximum relative errors in subintervals (%)

子区间	$[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	$[x_2, x_3]$	$[x_3, x_4]$
比斜法有理样条	1.87	7.09	1.74	2.28
分片三次 τ -样条	9.67	44.9	1.50	4.57

若给定数据分段符合(3)或注2的要求时, 可以分段用比斜法作有理样条插值. 在各分段端点处依命题1~3的原理选取控制参数, 往往也能得到整体具 C^1 连续性的拟合曲线.

例2 数据取自Akima^[6], 即

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_i =$	0	2	3	5	6	8	9	11	12	14	15
$y_i =$	10	10	10	10	10	10	10.5	15	50	60	85

在 $[x_0, x_7]$, $[x_7, x_8]$, $[x_8, x_{14}]$ 分别用有理二次样条插值, 依次得曲线段 C_1, C_2, C_3 . 在 x_7, x_8 处参数 m_7, m_8 应满足条件 $m_7 > \max\{\tau_7, \tau_8\}$, $m_8 < \min\{\tau_8, \tau_9\}$, 以保持整个曲线的光滑性.

图2显示出取 $m_7 = 36.0, m_8 = 4.0$ 时所得曲线的一截. 它表明在通常认为是困难的区间 $[x_8, x_9]$ 上, 保形效果是令人满意的.

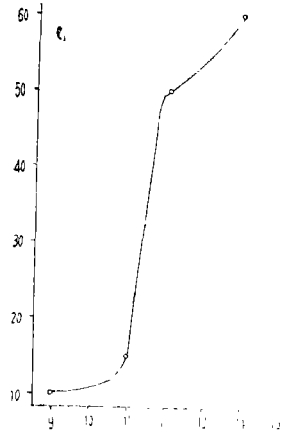


图2
Fig. 2

参 考 文 献

[1] Delbourgo R et al. *IMA J. Numer. Anal.*, 3(1983), 141~152
 [2] Delbourgo R et al., *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 6(1975), 967~976
 [3] Gregory J A, *Computer Aided Design*, 18(1986), 53~57
 [4] Schmidt J W et al., *Computing*, 38(1987), 261~267
 [5] Davis M et al., *Computing*, 38(1987), 299~313
 [6] Akima H, *J. ACM*, 17(1970), 589

Ratio-slope Rational Spline Interpolation

Li Luoluo*

Abstract

This paper proposes a ratio-slope rational quadratic spline interpolation procedure in which monotonicity and convexity that are presented in data, are preserved. Implementation of the procedure is quite easy. Error estimation and numerical examples are given.

Keywords rational quadratic spline, shape preserving interpolation

*Department of Computer Science