中山大学学报（自然科学版）
第28卷 第2期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.2
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

温盐双扩散系统非线性周期对流稳定性分析*

徐 兆 张涤明
（应用力学与工程系）

摘 要

提出一种研究流层中温盐对流的稳定性的方法．计算简单，且可应用于更广泛的一类系统．

关键词 温盐对流，周期解，稳定性

1 温盐对流基本方程

建立在Boussinesq假设基础上的双扩散系统的非线性对流稳定性问题，近代很多人进行了研究．1980年E．Knobloch和M．R．E．Proctor[1]对建立在简化基本方程基础上的一些例子探求了周期解的稳定性．但所用的方法涉及椭圆函数的复杂计算，很难应用到更一般的系统．本文应用文〔2〕提出的方法，简单计算就可求得周期解并判定其稳定性．

假设在平面$z=0$和$z=h$间的不可压缩流体的水平流层的上下边界面上，有固定的温度和盐度，设密度为ρ，温度为T，溶质浓度为S．

$$T=T_0+\Delta T[1-z+\theta(x,z)],\quad S=S_0+\Delta S[1-z+\Sigma(x,z)]$$

其中ΔT，$\Delta S>0$．引入流函数ϕ，$\bar{u}(x,z,t)\equiv(-\partial\phi/\partial z,\ 0,\ \partial\phi/\partial x)$，则函数$\theta$，$\Sigma$和$\phi$的方程如下：

$$\sigma^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi+J(\phi,\nabla^2\phi)\right]=R_T\frac{\partial\theta}{\partial x}-R_s\frac{\partial\Sigma}{\partial x}+\nabla^4\phi \tag{1}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+J(\phi,\theta)=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\nabla^2\theta \tag{2}$$

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t}+J(\phi,\Sigma)=\frac{\partial\phi}{\partial x}+\tau\nabla^2\Sigma \tag{3}$$

其中

$$\sigma=\nu/k_T,\quad \tau=k_S/k_T,\quad R_T=g\alpha\Delta Th^3/k_T\nu,\quad R_S=g\beta\Delta Sh^3/k_T\nu \tag{4}$$

ν为动力粘性系数，k_S为溶质扩散系数，g为重力加速度．$J(\phi,\theta)=\phi_x\theta_z-\phi_z\theta_x$．边界条件为

本文1988年3月1日收到

* 此研究计划由中山大学高等学术研究中心基金会资助

$$\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=\theta=\Sigma=0,\ 当z=0,1,$$

$$\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\Sigma}{\partial x}=0,\ 当x=0,\lambda.$$

上述系统有平凡解$\phi=\theta=\Sigma=0$，当R_T充分大时，这个平凡解是不稳定的。当$\tau\geqslant 1$或$R_s\leqslant R_{sc}$时，在$R_T=R_T^{(e)}$,或者当$\tau<1$和$R_S>R_{SC}$时在$R_T=R_T^{(0)}$均将出现首次不稳定性，前者是单调式，后者为螺旋式，其中$R_T^{(e)}$，$R_T^{(0)}$，R_{SC}用新参数$r_T^{(e)}$，$r_T^{(0)}$，r_{SC}的形式定义：

$$(R_T,R_S)=\frac{\lambda^2p^3}{\pi^2}(r_T,\ r_S),\ \ p=\pi^2(1+\lambda^{-2}),$$

$$r_T^{(e)}=1+r_S/\tau,\quad r_T^{(0)}=1+\frac{\Delta\tau}{\sigma}+\left(\frac{\sigma+\tau}{\sigma+1}\right)r_S \tag{5}$$

$$r_{SC}=\tau^2(\sigma+1)/\sigma(1-\tau),\ \ \Delta=1+\sigma+\tau$$

下面考虑螺旋式不稳定的情形，$r_T^{(0)}<r_T^{(e)}$。由于方程的非线性性质，可能出现有限振幅的周期振动。假设

$$r_S=r_{SC}+\varepsilon^2,\ \ \varepsilon^2\ll 1$$

则由(5)得

$$r_T^{(0)}=\frac{\sigma+\tau}{\sigma(1-\tau)}+\left(\frac{\sigma+\tau}{\sigma+1}\right)\varepsilon^2,\quad r_T^{(e)}=\frac{\sigma+\tau}{\sigma(1-\tau)}+\frac{1}{\tau}\varepsilon^2.$$

因此可令 $r_T=[(\sigma+\tau)/\sigma(1-\tau)]+\mu\varepsilon^2,$

其中$\mu=O_{(1)}$。由于r_T接近$r_T^{(e)}$运动的振幅是小的，按线性化理论求得振动频率ω_0为

$$\omega_0=\varepsilon[\sigma(1-\tau)/(1+\sigma)]^{1/2}.$$

令 $t^*=\varepsilon pt,$

并把ϕ，θ，Σ展开如下：

$$\phi=2/\pi(2/p)^{1/2}\lambda\{\varepsilon\sin(\pi x/\lambda)\sin\pi z a_1(t^*)+\varepsilon^3\sin(\pi x/\lambda)\sin 3\pi z a_3(t^*)+\cdots\} \tag{6}$$

$$\theta=2(2/p)^{1/2}\{\varepsilon\cos(\pi x/\lambda)\sin\pi z b_1(t^*)+\varepsilon^3\cos(\pi x/\lambda)\sin 3\pi z b_3(t^*)+\cdots\}-\frac{1}{\pi}\varepsilon^2\sin 2\pi z c(t^*)+\cdots\cdots \tag{7}$$

$$\Sigma=2(2/p)^{1/2}\{\varepsilon\cos\pi x/\lambda\sin\pi z d_1(t^*)+\varepsilon^3\cos\pi x/\lambda\sin 3\pi z d_3(t^*)+\cdots\}-\frac{1}{\pi}\varepsilon^2\sin 2\pi z c(t^*)+\cdots\cdots \tag{8}$$

把(6)—(8)代入(1)—(4)得

$$\varepsilon a_1'=\sigma\left\{-a_1+b_1\left[\frac{\sigma+\tau}{\sigma(1-\tau)}+\mu\varepsilon^2\right]-d_1\left[\frac{\tau^2(\sigma+1)}{\sigma(1-\tau)}+\varepsilon^2\right]\right\}+O(\varepsilon^4)$$

$$\varepsilon b_1'=-b_1+a_1-\varepsilon^2a_1c+O(\varepsilon^4).$$

$$\varepsilon c'=\omega(-c+a_1b_1)+O(\varepsilon^2),$$

$$\varepsilon d_1'=-\tau d_1+a_1-\varepsilon^2a_1e+O(\varepsilon^4),$$

$$\varepsilon e' = \omega(-\tau e + a_1 d_1) + O(\varepsilon^2).$$

式中撇号表示对t^*求导，$\omega = 4\pi^2/p$。为了简单起见，下面略去a_1，b_1，d_1的下标，得到

$$a'' - a^3 + Na = \varepsilon F(a) + O(\varepsilon^2) \tag{9}$$

其中 $$F(a) = \left\{\left(1 + \frac{1+\sigma}{\tau\Delta}\right)\left[3a^2 - N - a^2\left(4 + \frac{2}{\omega}\right)\right] + \frac{\sigma}{\tau\Delta}(1 - \mu\tau^2)\right\}a',$$

$$N = (1 - \mu\tau)\sigma/\Delta,\quad \Delta = 1 + \sigma + \tau.$$

设$N>0$，并作变换 $a = \sqrt{N}u$，$t^* = \bar{t}/\sqrt{N}$，

则(9)化为

$$u'' + u - u^3 = \varepsilon(\alpha_1 - \alpha_2 u^2)u' \tag{10}$$

式中

$$\alpha_1/\alpha_2 = [1 - \mu\tau^2 - (1 + \sigma + \tau\Delta)(1 - \mu\tau)]/[(1 + \sigma + \tau\Delta)(1 + \frac{2}{\omega})(1 - \mu\tau)]$$

2　周期解稳定性分析

现在研究方程(10)周期解的稳定性问题，应用文[2]的方法，令

$$g(u) = u - u^3,\qquad f(u) = -(\alpha_1 - \alpha_2 u^2),$$

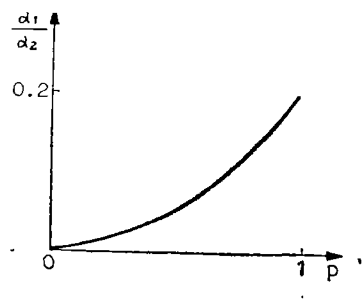
$$K(\rho) = \int_0^{2\pi} \rho^2 f(\rho\cos\varphi)\Phi_0(\rho,\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$

$$= -\int_0^{2\pi} \rho^2(\alpha_1 - \alpha_2\rho^2\cos^2\varphi)\Phi_0(\rho,\varphi)\sin^2\varphi d\varphi \tag{11}$$

其中 $\Phi_0(\rho,\varphi) = (1 - 0.75\rho^2 - 0.25\rho^2\cos 2\varphi)^{1/2}$，$0<\rho<1$。

令$K(\rho) = 0$得

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = D(\rho) \equiv \rho^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi\Phi_0(\rho,\varphi)\,d\varphi \Big/ \int_0^{2\pi} \Phi_0(\rho,\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$$



用数值积分法得$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = D(\rho)$的曲线如右图所示。它是$\rho$的单调上升函数。为了求$\alpha_1/\alpha_2$的上确界，令$\rho = 1$，得$\Phi_0(\rho,\varphi) = |\sin\varphi|/\sqrt{2}$因此得

$$\lim_{\rho\to 1} D(\rho) = \int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin^3\varphi d\varphi \Big/ \int_0^{\pi} \sin^3\varphi d\varphi = \frac{1}{5}$$

由此可知，当 $0 < \frac{\alpha_1}{\alpha_2} < \frac{1}{5}$，即

$$[\mu\tau(1+\sigma) + \tau(\sigma+\tau)]/[(1 + \frac{2}{\omega})(1 + \sigma + \tau\Delta)(1 - \mu\tau)] < \frac{1}{5}$$

或

$$\mu < \frac{1}{\tau}\left[\frac{5\tau(\sigma+\tau) + (1+\sigma+\tau\Delta)\left(1+\frac{2}{\omega}\right)}{5(1+\sigma) + (1+\sigma+\tau\Delta)\left(1+\frac{2}{\omega}\right)}\right] = \mu_c$$

时，方程(10)存在唯一的周期解。

为了研究周期解的稳定性，把(11)表为

$$K(\rho) = -B(\rho)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - D(\rho)\right] \tag{12}$$

式中

$$B(\rho)=\alpha_2\rho^2\int_0^{2\pi}\Phi_0(\rho,\varphi)\sin^2\varphi d\varphi>0$$

对(12)求导并把$\alpha_1/\alpha_2=D(\rho)$代入得

$$\frac{dK}{d\rho}=B(\rho)\frac{dD}{d\rho}$$

由此可知，在曲线$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=D(\rho)$上，$K'(\rho)$与$D'(\rho)$符号相同。由图 1 可见 $D'(\rho)>0$，因此，$K'(\rho)>0$。根据文〔2〕定理可断定，周期解是稳定的。

顺便指出，本方法可推广应用于更一般的情形[3]。

参 考 文 献

〔1〕Knobloch E and Proctor M R E, *J. Fluid, Mech* 108 (1981), 291-316

〔2〕徐兆、黄赪彪，力学与实践，10(1988)，5，6-11

〔3〕Xu Zhao (徐兆), Zhang Lingqi (张令奇), *Acta Mathematica Scientia*, 6((1986), 4, 643-462

On Stability Analysis of Nonlinear Periodic Convection in the Thermohaline Double-Diffusive Systems

Xu Zhao Zhang Diming*

Abstract

A method is presented for analysis of the stability of the thermohaline convection in a fluid layer. The method can be applied to a wider class of systems.

Keywords thermohaline convection, periodic solutions, stability

*Department of Mechanics