中山大学学报（自然科学版）
第28卷 第3期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.28 №.3
1989年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1989

三角形拟线性椭圆组弱解的处处正则性*

陈宝耀 娄琢明 林长好
（中山大学数学系） （华南师范大学数学系）

摘 要

在自然增长条件下，证明了三角形拟线性椭圆组$H^1\cap L^{n(r-1)/(2-r)}$弱解的L^p估计和处处正则性．在平方增长条件下，对有界弱解得到相同的结果．

关键词 拟线性椭圆组，对角线形椭圆条件，自然增长条件，L^p估计，处处正则性

1 引 言

考虑拟线性椭圆组

$$-D_\alpha(A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j+a_i^\alpha(x,u))=B_i(x,u,Du) \qquad i=1,2,\cdots,N \qquad (1)$$
$$x\in\Omega\subset\mathbf{R}^n$$

其中$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)$在$\Omega\times R^N$上连续、有界，满足条件：

（Ⅰ） 当$j>i$时，$A_{ij}^{\alpha\beta}(x,u)=0$； （三角形条件）

（Ⅱ） $A_{kk}^{\alpha\beta}(x,u)\xi_\alpha\xi_\beta\geqslant\lambda|\xi|^2$， $\forall\xi\in\mathbf{R}^n,\lambda>0$，（对角线形椭圆条件）

$a_i^\alpha(x,u)$、$B_i(x,u,Du)$对所有的$u\in H^1\cap L^{n(r-1)/(2-r)}(\Omega,R^N)$（或$u\in H^1\cap L^\infty(\Omega,R^N)$）是$x$的可测函数，满足自然增长条件：

（Ⅲ$_1$） $|a_k^\alpha(x,u)|\leqslant c\,(|u|^{n/(n-2)}+f_k^\alpha(x))$， $f_k^\alpha\in L^\sigma(\Omega),\sigma>n$

$$|B_k(x,u,p)|\leqslant c(|p|^r+|u|^{(n+2)/(n-2)}+b_k(x)),b_k\in L^s(\Omega),\ s>\frac{n}{2},\ 1+\frac{2}{n}<r<2$$

或 （Ⅲ$_2$） $|a_k^\alpha(x,u)|\in L^\sigma(\Omega,R^N)$， $\sigma>2$

$$|B_k(x,u,p)|\leqslant a\sum_{j=1}^{k}|p_j|^2+b_k(x),\ b_k\in L^s(\Omega),\ s>1.$$

文〔1，2〕讨论了(1)的有界弱解的正则性，并得到较好结果．本文把(1)的弱解的有界性条件减弱为有限可积，即只要求$u\in H^1\cap L^{n(r-1)/(1-r)}(\Omega,R^N)$，得到弱解的处处正则性．另方面讨论了平方增长的情形，得到相同的结果．值得一提的是，本文引入的对角

本文1987年12月20日收到
*中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

线形椭圆性条件(Ⅱ)比一般椭圆性条件弱。

我们称u是(1)的弱解，是指在(Ⅰ)—(Ⅲ$_1$)(或(Ⅰ)—(Ⅲ$_2$))条件下，$u\in H^1\cap L^{n(r-1)/(2-r)}(\Omega,R^N)$(或$H^1\cap L^\infty(\Omega,R^N)$)对$\forall\varphi\in H_0^1\cap L^{n(r-1)/(2-r)}(\Omega,R^N)$(或$H_0^1\cap L^\infty(\Omega,R^N)$)

满足

$$\int_\Omega [A_{kk}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^k+\sum_{j=1}^{k-1}A_{kj}^{\alpha\beta}(x,u)D_\beta u^j+a_k^\alpha(x,u)]D_\alpha\varphi^k\mathrm{d}x$$
$$=\int_\Omega B_k(x,u,Du)\varphi^k\mathrm{d}x\qquad k=1,2\cdots N\tag{2}$$

本文中，$n\geqslant3,N\geqslant2$，并采用了与[2]相同的符号，但文中重复指标k不表示求和。

2 L^p估计

定理1 设条件(Ⅰ)—(Ⅲ$_1$)满足，u是(1)的弱解，则存在$p>2$，使$u\in H_{loc}^{1,p}(\Omega,R^N)$，且对任意$x_0\in\Omega$及$R_0<\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$，当$R<R_0$时，

$$\left(⨍_{B_{R/2}}(|Du|^2+|u|^{2n/(n-2)})^{p/2}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\leqslant c\left\{\left(⨍_{B_R}(|Du|^2+|u|^{2n/(n-2)})\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right.$$
$$\left.+\left(⨍_{B_R}\sum_i\left(\sum_\alpha|f_i^\alpha|^2+|G_i|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right\}\tag{3}$$

其中 $G_i=\left(\int_{B_R}|b_i|^{2n/(n+2)}\mathrm{d}x\right)^{1/n}b_i^{n/(n+2)}$.

证明 设$x_0\in\Omega$，$R<\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)$，取$\eta\in C_0^\infty(B_R)$是标准的截断函数，令$\varphi^k=(u^k-u_R^k)\eta^2$，代入(2)，经计算化简，可得

$$\int_{B_R}(|Du^k|^2+|u|^{2n/(n-2)})\eta^2\mathrm{d}x\leqslant c\left\{\int_{B_R}\sum_{j=1}^{k-1}|Du^j|^2\eta^2\mathrm{d}x+|B_R|\left(⨍_{B_R}(|Du|^2\right.\right.$$
$$+|u|^{2n/(n-2)})^{q/2}\mathrm{d}x\Big)^{2/q}+\left[\varepsilon+\left(\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x\right)^{2/(n-2)}\right.$$
$$\left.+\left(\int_{B_R}|u|^{n(r-1)/(2-r)}\mathrm{d}x\right)^{(2-r)/n}\right]\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x$$
$$\left.+\int_{B_R}\sum_\alpha|f_k^\alpha|^2\mathrm{d}x+\left(\int_{B_R}|b_k(x)|^{2n/(n+2)}\mathrm{d}x\right)^{(n+2)/2}\right\}\tag{4}$$

由$u\in H^1\cap L^{n(r-1)/(2-r)}$及积分绝对连续定理知，存在$R_0>0$使当$R<R_0$时

$$\int_{B_R}(|Du^k|+|u|^{2n/(n-2)})\eta^2\mathrm{d}x\leqslant c\left\{\int_{B_R}\sum_{j=1}^{k-1}|Du^j|^2\eta^2\mathrm{d}x\right.$$
$$+\varepsilon\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x+|B_R|\left(⨍_{B_R}(|Du|^2+|u|^{2n/(n-2)})^{q/2}\mathrm{d}x\right)^{2/q}$$
$$\left.+\int_{B_R}\sum_\alpha|f_k^\alpha|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}|G_k|^2\mathrm{d}x\right\}\tag{5}_k$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

作迭代，把$(5)_{k-1}$代入$(5)_k$，$k=2,3,\cdots\cdots N$，消去$(5)_k$右端第一项，将迭代后的各式相加，取$\varepsilon>0$充分小，便得

$$\fint_{B_{R/2}}(|Du|^2+|u|^{2n/(n-2)})\mathrm{d}x\leqslant c\{(\fint_{B_R}(|Du|^2+|u|^{2n/(n-2)})^{q/2}\mathrm{d}x)^{2/q}$$
$$+\fint_{B_R}\sum_i(\sum_\alpha|f_i^\alpha|^2+|G_i|^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\fint_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x$$

由文〔2〕命题1.1立得(3)式。证毕。

类似定理1的证明，可得

定理2　设条件(Ⅰ)—(Ⅲ$_2$)满足，u是(1)的弱解，$M=\sup\limits_{\Omega}|u|$，$2aM<\lambda$，则存在$p>2$，使$u\in H^{1,p}_{loc}(\Omega,R^N)$。

3　$C^{0,\alpha}$正则性

定理3　设条件(Ⅰ)—(Ⅲ$_1$)满足，则对某个$\alpha\in(0,1)$，(1)的弱解$u\in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,R^N)$。

证明　设$x_0\in\Omega$，$R<\mathrm{dist}(x_0,\alpha\Omega)\wedge 1$，在$B_R$上分解$u^k=U^k+(u^k-U^k)$，$U^k$是下列Dirichlet问题的解

$$\begin{cases}\int_{B_R}A^{\alpha\beta}_{kk}(x,u)D_\beta U^kD_\alpha\varphi^k\mathrm{d}x=0 & \forall\varphi^k\in H^1_0(B_R)\\ U^k-u^k\in H^1_0\cap L^{n(r-1)/(2-r)}(B_R)\end{cases}\tag{6}$$

应用De Giorgi-Nash定理，由(2)、(6)可推得，存在$\mu\in(0,1)$，对任意$\rho\in(0,R)$有

$$\int_{B_\rho}|Du^k|^2\mathrm{d}x\leqslant c\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^{n-2+2\mu}\int_{B_R}|Du^k|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}\sum_{j=1}^{k-1}|Du^j|^2\mathrm{d}x$$
$$+\int_{B_R}|u|^{2n/(n-2)}\mathrm{d}x+\Big(\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x\Big)^r+R^{n-2+2\alpha}\Big]\tag{7$_k$}$$

$\alpha\leqslant\min(\mu,1-\frac{n}{\alpha},\ 2-\frac{n}{s})$.

由定理1知存在$p>2$，使$u\in H^{1,p}_{loc}(\Omega,R^N)$，故有

$$\Big(\int_{B_\rho}|Du|^2\mathrm{d}x\Big)^r\leqslant c\rho^{\varepsilon\gamma}\leqslant c\rho^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})}\qquad \varepsilon=n(1-\frac{2}{p})\tag{8}$$

$$\int_{B_\rho}|u|^{2n/(n-2)}\mathrm{d}x\leqslant\Big[\Big(\frac{\rho}{R}\Big)^n\int_{B_R}|u|^{2n/(n-2)}\mathrm{d}x+R^{\varepsilon\frac{n}{n-2}}\Big]$$

应用文〔2〕引理2.1，得

$$\int_{B_\rho}|u|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}x\leqslant c\rho^{\varepsilon(\frac{n}{n-2})}\leqslant c\rho^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})}\tag{9}$$

将(8)、(9)代入$(7)_1$右端，得

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.

$$\int_{B_\rho}|Du^1|^2\,dx\leqslant c\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2+2\mu}\int_{B_R}|Du^1|^2dx+R^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})}+R^{n-2+2\alpha}\right]$$

若$\varepsilon\left(1+\frac{2}{n}\right)<n-2+2\alpha$，得

$$\int_{B_\rho}|Du^1|^2dx\leqslant c\rho^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})}$$

代入$(7)_2$，继续迭代下去，可得

$$\int_{B_\rho}|Du|^2dx\leqslant c\rho^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})} \tag{10}$$

重复(8)推出(9)的过程，得

$$\int_{B_\rho}|u|^{\frac{2n}{n-2}}dx\leqslant c\rho^{\varepsilon(1+\frac{2}{n})^2} \tag{11}$$

反复迭代，经过m步之后，m为正整数，满足

$$\left(1+\frac{2}{n}\right)^{m-1}\varepsilon<n-2+2\alpha<\left(1+\frac{2}{n}\right)^m\varepsilon$$

得到
$$\int_{B_\rho}|Du|^2dx\leqslant c\rho^{n-2+2\alpha} \tag{12}$$

由Morrey[1]引理知，$u\in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,R^N)$。

4 $C^{1,\beta}$ 正则性

定理 4 设条件(Ⅰ)—(Ⅲ$_1$)满足，((Ⅲ$_1$)中$b_k(x)\in L^\infty(\Omega)$)，又设$A^{\alpha\beta}_{kk}(x,u)$、$a^\alpha_k(x,u)$关于$x$、$u$具有指数为$\beta$的Hölder连续性，则(1)的弱解 $u\in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega,R^N)$。

引理 1 在定理 4 的条件下，对所有的$\alpha\in(0,1)$，有$u\in C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega,R^N)$。

定理 4 的证明 由 $A^{\alpha\beta}_{kk}$、a^α_k关于x、u的Hölder连续性知，存在有界、连续、非减的非负凹函数w，$w(0)=0$，使对任意$x,y\in\Omega$，$t,u,v\in R^N$，满足

$$w(t)\leqslant ct^\beta \tag{13}$$

$$|A^{\alpha\beta}_{kk}(x,u)-A^{\alpha\beta}_{kk}(y,v)|\leqslant w(|x-y|^2+|u-v|^2)$$

$$|a^\alpha_k(x,u)-a^\alpha_k(y,v)|\leqslant w(|x-y|^2+|u-v|^2)$$

对$\forall x_0\in\Omega$，$R<\mathrm{dist}(x_0,\partial\Omega)\wedge 1$，分解$u^k=U^k+(u^k-U^k)$，$U^k$是下述 Dirichlet问题的解

$$\begin{cases}\int_{B_R}A^{\alpha\beta}_{kk}(x_0,u_R)D_\beta U^kD_\alpha\varphi^k=0 & \forall\varphi^k\in H^1_0(B_R)\\ U^k-u^k\in H^1_0(B_R)\end{cases} \tag{14}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

应用文[2]定理2.1，综合(2)、(14)可以推得，对$\forall\rho<R$，有

$$\int_{B_\rho}|Du^k-(Du^k)_\rho|^2\mathrm{d}x\leqslant c\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{B_R}|Du^k-(Du^k)_R|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}|D(u^k-U^k)|^2\mathrm{d}x\right\}$$

$$\leqslant c\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{B_R}|Du^k-(Du^k)_R|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}\sum_{j=1}^{k-1}|Du^j|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}w^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}w^2|Du^k|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}(1+|Du|^2)|u^k-U^k|^2\mathrm{d}x\right. \tag{15}$$

由w的有界凹性及定理1，引理1，得

$$\int_{B_R}w^2\mathrm{d}x\leqslant cR^{n+2\alpha\beta} \tag{16}$$

$$\int_{B_R}w^2|Du^k|^2\mathrm{d}x\leqslant cw^{1-\frac{2}{p}}\left(R^2+R^{2-n}\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x\right)\int_{B_R}(1+|Du|^2)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant cR^{n-2+2\alpha+2\alpha\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)} \tag{17}$$

$$\int_{B_R}(1+|Du|^2)(u^k-U^k|\mathrm{d}x\leqslant c\left(R^{2-n}\int_{B_R}|Du|^2\mathrm{d}x\right)^{1-\frac{2}{p}}\int_{B_R}(1+|Du|^2)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant cR^{n-2+2\alpha+2\alpha\left(1-\frac{2}{p}\right)} \tag{18}$$

将(16)—(18)代入(15)得

$$\int_{B_\rho}|Du^k-(Du^k)_\rho|^2\mathrm{d}x\leqslant c\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{B_R}|Du-(Du)_R|^2\mathrm{d}x+\int_{B_R}\sum_{j=1}^{k-1}|Du^j|^2\mathrm{d}x+R^{n-2+2\alpha+2\alpha\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)}\right\}$$

上式两端同乘$\delta^{k-1}(0<\delta<1)$，再对$k=1,2,\cdots,N$求和取δ充分小，使$\delta+\cdots+\delta^{N-1}<R^{2\beta}$，有

$$\int_{B_\rho}|Du-(Du)_\rho|^2\mathrm{d}x\leqslant c\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{B_R}|Du-(Du)_R|^2\mathrm{d}x+R^{n-2+2\alpha+2\alpha\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)}\right\} \tag{19}$$

取α充分接近1，使$2\alpha\left(1+\beta\left(1-\frac{2}{p}\right)\right)>2$，得

$$\int_{B_\rho}|Du-(Du)_\rho|^2\mathrm{d}x\leqslant c\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2}\int_{B_R}|Du-(Du)_R|^2\mathrm{d}x+R^{n+2\varepsilon}\right]\quad 0<\varepsilon<1,$$

可知Du在Ω中局部Hölder连续，且局部有界，这时，(16)—(18)可改进为

$$\int_{B_R}w^2\mathrm{d}x\leqslant cR^{n+2\beta} \tag{16'}$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

$$\int_{B_R} w^2 |Du^k|^2 \, dx \leqslant cR^{n+2\beta} \tag{17'}$$

$$\int_{B_R} (1+|Du|^2)|u^k - U^k| \, dx \leqslant \varepsilon \int_{B_R} |D(u^k - U^k)|^2 dx + cR^{n+2} \tag{18'}$$

把(16)′—(18)′代入(15)，取ε充分小，得

$$\int_{B_\rho} |Du^k - (Du^k)_\rho|^2 dx \leqslant c\left\{\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n+2} \int_{B_R} |Du^k - (Du^k)_R|^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \int_{B_R} |Du^j|^2 dx + R^{n+2\beta}\right\}$$

$\therefore \quad Du \in C^{0,\beta}_{loc}(\Omega, R^{nN})$，　即　$u \in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega, R^N)$。

定理5　设条件(Ⅰ)—(Ⅲ$_2$)满足，((Ⅲ$_2$)中a^α_k，$b_k \in L^\infty(\Omega)$)，u是(1)的弱解，$M = \sup\limits_\Omega |u|$，$2aM < \lambda$，又$A^{\alpha\beta}_{kk}(x,u)$关于$x$、$u$具有指数为$\beta$的Hölder连续性，则 $u \in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega, R^N)$。

证明　分三步　(i)　类似引理1，可证得存在开域$\Omega_0 \subset\subset \Omega$，

$$\Omega_0 = \left\{ x \in \Omega: \liminf_{R \to 0^+} R^{2-n} \int_{B_R(x)} |Du|^2 dx = 0 \right\}$$

(ii)　同定理4，可证$Du \in C^{0,\beta}_{loc}(\Omega_0, R^{nN})$，即$u \in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega_0, R^N)$

(iii)　证明$\Omega_0 = \Omega$。为此只须证对$\forall x_0 \in \Omega, \varepsilon > 0$，存在$R_0$，使当$\rho < R_0$时，有

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho(x_0)} |Du|^2 dx < \varepsilon$$

用归纳法，当$k=1$时，与单个方程的情况类似（参见文〔2〕），可以证得，存在$R_1 > 0$，当$\rho < R_1$时，

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho} |Du^1|^2 dx < \varepsilon$$

故$u^1 \in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega)$。设$u^1, \cdots, u^{k-1} \in C^{1,\beta}_{loc}(\Omega)$。注意到当$j < k$时，$Du^j$局部有界，同$k=1$时证明，存在$R_k > 0$，当$\rho < R_k$时，

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho} |Du^k|^2 dx < \varepsilon$$

取$R_0 = \min(R_1, R_2, \cdots, R_N)$，当$\rho < R_0$时，有

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho} |Du|^2 < \varepsilon \quad .$$

证毕

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.

参 考 文 献

〔1〕 Morrey C B, *Journ. & Mech.*, 17 (1968), 649-670

〔2〕 Giaquinta M, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Princeton University Press, 1983

Everywhere Regularity of Weak Solutions to Quasilinear Elliptic Systems of Triangular Form

*Chen Baoyao**　　*Lou Zuoming*　　*Lin Changhao*

Abstract

Under natural growth condition, we prove the L^p-estimate and everywhere regularity for $H^1 \cap L^{n\frac{r-1}{2-r}}$ weak solutions of quasilinear elliptic systems of triangular form. Under quadratic growth condition, we obtain the same result for the bounded weak solutions.

Keywords quasilinear elliptic system, diagonal ellipticity condition, natural growth condition, L^p-estimate, everywhere regularity

* Department of Mathematics

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.