

分段常数型自治泛函微分方程的周期解

朱思铭 伍咏棠
(数学系)

摘 要

研究了含参数 α 的分段常数型(1)或(2)的自治泛函微分方程(*).应用“Poincare映射”和推广的Li-Yorke定理,经过推导得到了泛函方程的周期解、振动性和混沌现象及其对参数的依赖关系.

关键词 泛函微分方程, 周期解, 振动性, 混沌

1 考虑一维非线性自治泛函微分方程

$$\dot{x}(t) = f(x(t-1)) \quad (*)$$

讨论方程(*)的如下两种类型.它们均是分段常数型泛函微分方程.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \\ -\alpha & \text{当 } x < 0 \text{ 或 } x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

和

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{当 } x \leq 0 \\ 2 & \text{当 } 0 < x \leq 1 \\ -2 & \text{当 } 1 < x \leq 2 \\ -\alpha & \text{当 } x > 2 \end{cases} \quad (2)$$

其中 $1 \leq \alpha \leq 2$.

文[1]中仅讨论 $\alpha = 1$ 时出现混沌的问题;本文将研究含参数 α 的满足(1)或(2)的泛函微分方程(*)的“Poincare映射”的图貌,从而得到泛函微分方程(*)的全部周期解、振动性和混沌现象的情况.

令 \mathbf{C} 为 $\phi: [-1, 0] \rightarrow \mathbf{R}$ 连续函数空间.定义

$$\Phi \triangleq \{ \phi \in \mathbf{C} : \exists v \in [0, 1], \phi(0) = \phi(-v) = 0; 0 < \phi(t) < 1, \\ \text{当 } t \in [-1, -v]; \Phi(t) < 0 \text{ 当 } t \in (-v, 0) \}$$

于是对任 $x_0 = \phi \in \Phi$,存在满足(1)或(2)的泛函微分方程(*)的解 $x(t+s) \triangleq x_s(t) \in \mathbf{C}$, $x_0(t) = x_0$.

记 $I \triangleq [0, 1]$,对函数类 Φ 可定义映射

本文1989年12月22日收到

$$V: \Phi \rightarrow I, V(\phi) = v$$

且在 $\Phi \cap V^{-1}(I)$ 上有“Poincare映射” $Pv = x_s$, 这里 s 为满足 $x_s(t) \in \Phi$ 的第一个正时刻。于是, 对映射

$$F: I \rightarrow I, Fv = V(Pv)$$

在 $\Phi \cap V^{-1}(I)$ 上有 $V \circ P = F \circ V$, 即

$$\begin{array}{ccc} \Phi \cap V^{-1}(I) & \xrightarrow{P} & \Phi \\ \downarrow V & & \downarrow V \\ I & \xrightarrow{F} & I \end{array}$$

F 及 F^n 的不动点 $F^n v = v$ 对应于满足初始函数类 Φ 的泛函微分方程 (*) 的周期解。其中 n 表示振动 (过零点) 次数。

研究满足初始函数类 Φ 的其右端函数 $f(x)$ 为 (1) 或 (2) 形的泛函微分方程 (*) 的周期解、振动性和混沌现象。通过所定义的映射 V 和 F , 把求方程 (*) 的周期解、振动性及混沌问题化为求 F^n 的不动点及其性态问题。

2 首先研究其右端函数为 (1) 的泛函微分方程 (*)。由于 $f(x)$ 为分段常数, (*) 的解可表示为

$$x(t) = x(t_0) \pm \alpha(t - t_0)$$

其中 $t_0 \geq 0$, 当 $0 \leq x(t-1) \leq 1$ 时取正号, 否则取负号。根据方程 (*) 的初始函数类 Φ 的性质。我们有

引理 1 对 $\frac{3}{4} < v \leq 1$, 有 $Fv = 0$; 对 $\frac{1}{2} < v \leq \frac{3}{4}$, 有 $Fv = 4v - 2$ 。

证明 对 $\frac{2}{1} < v \leq 1$, 由假设 $1 < \alpha \leq 2$, 可以通过逐段推进解得

$$\text{当 } 0 \leq t \leq 1 - v \text{ 时, } x(t) = at \leq 1$$

$$\text{当 } 1 - v < t \leq 1 \text{ 时, } x(t) = 2\alpha(1 - v) - at$$

于是 $x(1) = \alpha(1 - 2v) < 0$, 进一步可求得: 当 $1 < t \leq 3 - 2v$ 时, $x(t) = at - 2\alpha v$ 。

对 $\frac{3}{4} < v \leq 1$, 由于 $x(3 - 2v) = \alpha(3 - 4v) < 0$ 。显然, 当 $t \geq 3 - 2v$ 时 $x(t) = \alpha(3 - 4v)$

$- \alpha(t - 3 + 2v) < 0$ 。即当 $t \geq 3 - 2v$ 时 (*) 的解 $x(t)$ 不再过零点。从而不存在 $x_s(t) \in \Phi$ 。于是 $Fv = 0$ 。

对 $\frac{1}{2} < v < \frac{3}{4}$, 由于 $x(3 - 2v) > 0$, 存在 $t^{**} = 2v$ 使 $x(t^{**}) = 0$ 。且 $t^* = 2(1 - v) < t^{**}$

时亦有 $x(t^*) = 0$ 。同时 $t^{**} - t^* = 4v - 2 < 1$, 从而 $x_{t^{**}}(t) \in \Phi$, 于是 $Fv = 4v - 2$ 。

引理 1 得证。

类似地可得

引理 2 对 $1 - \frac{1}{\alpha} < v \leq \frac{1}{2}$, 有 $Fv = 2(1 - \frac{1}{\alpha})$

引理 3 对 $\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha}) \leq v \leq 1 - \frac{1}{\alpha}$, 有 $Fv = 2(1 - \frac{1}{\alpha})$

引理 4 对 $0 \leq v \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{\alpha})$, 有 $Fv = 2(1 - \frac{1}{\alpha})$

综合上述引理, 我们得到

定理 1 对含参数 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的满足(1)的泛函微分方程(*), 其初始函数类为 Φ 时有

$$Fv = \begin{cases} 2(1 - \frac{1}{\alpha}) & \text{当 } 0 \leq v \leq \frac{1}{2} \\ 4v - 2 & \text{当 } \frac{1}{2} < v \leq \frac{3}{4} \\ 0 & \text{当 } \frac{3}{4} < v \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

这里 $F: I \rightarrow I$ 由“Poincare映射” $Pv = x_s \in \Phi$ 所确定; $Fv = V(Pv)$, 而 $V: \Phi \rightarrow I, V(\phi) = v$

现在讨论映射 F 的不动点. 记

$$\beta_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4^n}, \quad \tilde{\beta}_n = \frac{2}{2 - \beta_n}$$

$$\gamma_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{6 \cdot 4^n}, \quad \tilde{\gamma}_n = \frac{2}{2 - \gamma_n}$$

由定理 1 容易证得

定理 2 对含参数 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的右端具分段常数型(1)的泛函微分方程(*), 其初始函数类为 Φ 时有

(a) 当 $\frac{2}{3} < \beta_n < v < \beta_{n-1} \leq 1$ 时, $F^n v = 0, F^k v \neq 0 (k = 1, \dots, n-1)$

(b) 当 $v = \frac{2}{3}$ 时, $Fv = v$

(c) 当 $0 \leq \gamma_n < v < \gamma_{n+1} < \frac{2}{3}$ 时, 依 α 可分

(i) 当 $1 \leq \tilde{\gamma}_{m-1} < \alpha < \tilde{\gamma}_m < \frac{3}{2}$ 时 $F^{n+m} v = F^n v, F^{k+j} v \neq F^k v$
($k = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m-1$)

(ii) 当 $\alpha = \frac{3}{2}$ 时, $F^{n+1} v = F^n v, F^{k+1} v \neq F^k v (k = 1, \dots, n-1)$

(iii) 当 $\frac{3}{2} < \tilde{\beta}_{m+1} < \alpha < \tilde{\beta}_m \leq 2$ 时, $F^{n+m} v = 0, F^k v \neq 0$
($k = 1, \dots, n+m-1$)

回到泛函微分方程(*)的解. 对应于 $F^n v = v$ 的方程(*)的解 $x(t+s)$, 其中 $x_s(t) \in \Phi, x_0(t) = V^{-1}(v)$ 称为 n -周期解. 对应于 $F^{m+n} v = F^m v, F^{k+j} v \neq F^k v (k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n-1)$ 的方程(*)的解 $x(t+s)$, 其中 $x_s(t) \in \Phi, x_0(t) = V^{-1}(v)$, 称为 m 次振动的 n 周期解. 而对应于 $F^m v = 0, F^k v \neq 0 (k = 1, \dots, m-1)$ 的(*)的解 $x(t+s)$, 其中 $x_s(t) \in \Phi, x_0(t) = V^{-1}(v)$, 称为 m 次振动发散解. 于是, 相应于定理 2 有

定理 2* 对分段常数型(1)泛函微分方程(*), 其初始函数为 $x_0(t) = V^{-1}(v)$ 时, 有

(a) 当 $\frac{2}{3} < \beta_n < v < \beta_{n-1} \leq 1$ 时(*)的解 $x_s(t)$ 是 n 次振动的.

(b) 当 $v = \frac{2}{3}$ 时解 $x_s(t)$ 是 1-周期解.

(c) 当 $0 \leq \gamma_{m-1} < v \leq \gamma_m < \frac{2}{3}$ 时, 依 α 可分

(i) 当 $1 \leq \tilde{\gamma}_{m-1} < \alpha \leq \tilde{\gamma}_m < \frac{3}{2}$ 时 $x_s(t)$ 是 n 次振动的 m 周期解.

(ii) 当 $\alpha = \frac{3}{2}$ 时 $x_s(t)$ 为 n 次振动 1-周期解.

(iii) 当 $\frac{3}{2} < \tilde{\beta}_{m+1} \leq \alpha \leq \tilde{\beta}_m \leq 2$ 时 $x_s(t)$ 为 $n+m$ 次振动的发散解.

依 α 参数分类, 我们有

定理 3 对含参数 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的满足 (1) 的泛函微分方程 (*), 除 1-周期解外, 可得

(a) 当 $1 \leq \tilde{\gamma}_{m-1} < \alpha < \tilde{\gamma}_m < \frac{3}{2}$ 时方程 (*) 存在经任意指定次数振动后最终为 m 周期的周期解或发散解.

(b) 当 $\alpha = \frac{3}{2}$ 时方程 (*) 存在任意次振动后最终为 1-周期的周期解或发散解.

(c) 当 $\frac{3}{2} < \tilde{\beta}_{m+1} < \alpha < \tilde{\beta}_m \leq 2$ 时方程 (*) 的解为任意大于 m 次振动的发散解.

推论 1 对初始函数类 Φ 的右端具分段常数型 (1) 的泛函微分方程 (*). 如按其解过零点次数分类. 则 $\alpha = \tilde{\gamma}_m$ 是最终为 m 周期的分支点; $\alpha = \tilde{\beta}_m$ 为不少于 m 次振动的分支点; $\alpha = \frac{3}{2}$ 时其解最终为 1-周期的. 但其任意小邻域均存在 m 为充分大的分支点 $\tilde{\beta}_m$ 和 $\tilde{\gamma}_m$.

推论 2 对任一确定的 $\alpha: 1 \leq \alpha < \frac{3}{2}$, 泛函方程 (*) 有两个平衡解. 一是初始函数为 $x_0(t) = V^{-1}(\frac{3}{4})$ 的周期解, 它是不稳定的, 其邻域一边趋于发散, 一边趋于另一平衡解. 另一平衡解是由 α 确定的当 $\tilde{\gamma}_{m-1} < \alpha \leq \tilde{\gamma}_m$ 时为 m 周期解. 它是稳定的, 任何其他对应于初始函数为 $x_0(t) = V^{-1}(v), 0 \leq v < \frac{2}{3}$ 的解均趋于此周期解.

注 对于 (1) 型方程 (*), 由于其 “Poincare 映射” 是间断的, 虽然存在任意次振动后最终为任意周期的周期解或发散解, 但却不存在混沌 (Chaos) 现象.

3 研究右端函数为 (2) 的泛函微分方程 (*). 同样, 在某区间内, (*) 的解可表示为

$$x(t) = x(t_0) \pm \beta(t - t_0), \beta = 2 \text{ 或 } \alpha$$

根据初始函数类 Φ 的性质. 我们有

引理 5 对 $\frac{3}{4} < v \leq 1$ 有 $Fv = 0$; 对 $\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{3}{4}$ 有 $Fv = 4v - 2$.

证明与引理 1 相同, 仅取 $\alpha = 2$.

引理 6 对 $\frac{1}{4} \leq v < \frac{3}{8}$, 有 $Fv = 1$.

证明 逐段递推, 有 当 $0 \leq t \leq 1 - v$ 时, $x(t) = 2t$

其中, $x(\frac{1}{2}) = 1$.

当 $1 - v \leq t \leq 1$ 时, $x(t) = 4(1 - v) - 2t$

其中, $x(\frac{3}{2} - 2v) = 1$,

当 $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$ 时, $x(t) = -4v + 2t$

其中, $x(\frac{1}{2} + 2v) = 1$.

当 $\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{5}{2} - 2v$ 时, $x(t) = 6 - 4v - 2t \geq 1$

当 $\frac{5}{2} - 2v \leq t \leq \frac{3}{2} + 2v$ 时, $x(t) = 4v - 4 + 2t \leq 2$

当 $\frac{3}{2} + 2v \leq t \leq \frac{3}{2} + 6v$ 时, $x(t) = 2 + 2v - 2t$

其中, $x(\frac{1}{2} + 6v) = 1$, 且存在 $t^* = 1 + 6v$ 使得 $x(t^*) = 0$.

当 $\frac{3}{2} + 6v \leq t \leq 2 + 6v$ 时, $x(t) = -4 - 12v + 2t$

于是存在 $t^{**} = 2 + 6v$ 使得 $x(t^{**}) = 0$, 由于 $t^{**} - t^* = 1$ 从而 $x_{t^{**}}(t) \in \Phi$, 而且 $Fv = 1$,

引理得证.

类似地可逐段递推证得

引理 7 对 $\frac{3}{8} \leq v < \frac{7}{16}$, 有 $Fv = 7 - 16v + \alpha(8v - 3)$

引理 8 对 $\frac{7}{16} \leq v < \frac{1}{2}$, 有 $Fv = 2(\frac{1}{\alpha} - 1)(16v - 7) + \alpha(8v - 3)$

引理 9 对 $\frac{1}{8} \leq v < \frac{1}{4}$, 有 $Fv = 8v - 1 + \alpha(1 - 4v)$

引理 10 对 $0 \leq v < \frac{1}{8}$, 有 $Fv = 2(\frac{1}{\alpha} - 1)(1 - 8v) + \alpha(1 - 4v)$

综合引理 5 至引理 10, 可得

定理 4 对含参数 $1 \leq \alpha \leq 2$ 的右端具分段常数型(2)的泛函微分方程(*), 其初始函数类为 Φ 时有

$$Fv = \begin{cases} 2(\alpha^{-1} - 1)(1 - 8v) + \alpha(1 - 4v) & \text{当 } 0 \leq v < 1/8 \\ 8v - 1 + \alpha(1 - 4v) & \text{当 } 1/8 \leq v < 1/4 \\ 1 & \text{当 } 1/4 \leq v < 3/8 \\ 7 - 16v + \alpha(8v - 3) & \text{当 } 3/8 \leq v < 7/16 \\ 2(\alpha^{-1} - 1)(16v - 7) + \alpha(8v - 3) & \text{当 } 7/16 \leq v < 1/2 \\ 4v - 2 & \text{当 } 1/2 \leq v \leq 3/4 \\ 0 & \text{当 } 3/4 < v \leq 1 \end{cases} \quad (4)$$

这里 $F: I \rightarrow I$ 由“Poincare映射” $Pv = x_s \in \Phi$ 所确定, $Fv = V(Pv)$, 而 $V: \Phi \rightarrow I, V(\phi) = v$.

推论 3 泛函微分方程(*) (2) 当 $\alpha = 1$ 时有

$$Fv = \begin{cases} 1 - 4v & \text{当 } 0 \leq v < 1/8 \\ 4v & \text{当 } 1/8 \leq v < 1/4 \\ 1 & \text{当 } 1/4 \leq v < 3/8 \\ 4 - 8v & \text{当 } 3/8 \leq v < 7/16 \\ 8v - 3 & \text{当 } 7/16 \leq v < 1/2 \\ 4v - 2 & \text{当 } 1/2 \leq v \leq 3/4 \\ 0 & \text{当 } 3/4 < v \leq 1 \end{cases} \quad (5)$$

现在讨论 $\alpha = 1$ 时方程 (*) (2) 的周期解。我们由推论 2 求 F 的 n 周期点 $F^n v = v, F^k v \neq v (k = 1, \dots, n - 1)$ ，它对应于方程 (*) (2) 的 n -周期解，即经过 n 次振动(过零点)的周期解。

当 $\alpha = 1$ 时, 由(5) F 的映射图如图1, F^2 如图2。对任 n, F^n 映射图中, 除位于 $F = 0$ 及 $F = 1$ 的(平行)线段外均为一端在 $F = 0$ 另一端在 $F = 1$ 的全线段或一端在 $F = \frac{1}{2}$ 而另一端在 $F = 1$ 的半线段, 它们的斜率为 $\pm 4^n$ 或 $\pm 2 \cdot 4^n$ 。记 $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ 区域中的全线段为 L , 半线段为 N ; 而 $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ 区域中的全线段为 \bar{L} , 半线段为 \bar{N} 。 F 映射使 N, \bar{N} 分别变为 L, \bar{L} ; 而 L, \bar{L} 分别变为 $4N + L$ 和 $4\bar{N} + \bar{L}$ (只计线段数, 不计斜率及位置变化) 即有

$$F: N \rightarrow L, \bar{N} \rightarrow \bar{L}, L \rightarrow 4N + L, \bar{L} \rightarrow 4\bar{N} + \bar{L}$$

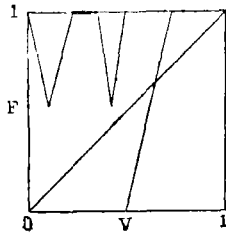


图 1
Fig.1

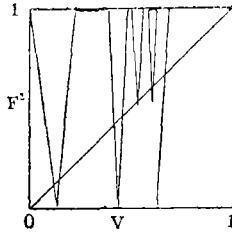


图 2
Fig.2

于是, 对 F^n 如有

$$F^n = aN + bL + c\bar{N} + d\bar{L}$$

则 $F^{n+1} = 4bN + (a+b)L + 4d\bar{N} + (c+d)\bar{L} \quad (6)$

现求 F^n 的不动点 $F^n v = v$ 。对任一全线段 L, \bar{L} 均有且只有一不动点, 但对半线段 N 和 \bar{N} , 仅在 $\frac{1}{2} \leq v < 1$ 处 \bar{N} 有且只有一不动点, 在 $0 \leq v < \frac{1}{2}$ 区域 N 没有不动点。另一方面, 根据 (5), 有且仅有一 $\bar{L}: Fv = 4v - 2$ 有过 $v = \frac{2}{3}$ 的不动点, 且此不动点对任 F^n , 均存在, 而其余的一切线段均在 $v = \frac{2}{3}$ 的左端, 它们不可能对 F^n 和 F^{n+1} 具有相同

的不动点.即对 F^n ,其不动点 $F^n v = v$ 除 $v = \frac{2}{3}$ 外均有 $F^k v \neq v(k = 1, \dots, n-1)$. 于是除 $v = \frac{2}{3}$ 外其余不动点对应的均为周期点. 进一步考虑到线段的斜率均为 $\pm 4^n$ 和 $\pm 2 \cdot 4^n$ 的事实. 我们得到:

定理 5 对泛函微分方程(*) (2), 当 $\alpha = 1$ 时存在一个1-周期解, 而 n -周期解数($n > 1$)为

$$N_n = (b + c + d) - 1 \tag{7}$$

这里的 b, c, d 由递归式(6)决定. 而 $F = 4N + \bar{L}$. 而且, 所有的 n -周期解($n > 1$)均为不稳定的.

由(5)、(6)和(7)有

$$\begin{aligned} \text{推论 4} \quad F^n \text{映射图中 } F &= 4N + \bar{L}, \quad F^2 = 4L + 4\bar{N} + \bar{L}, \quad F^3 = 16N + 4L + 4\bar{N} + 5\bar{L}, \\ F^4 &= 16N + 20L + 20\bar{N} + 9\bar{L}, \quad F^5 = 80N + 36L + 36\bar{N} + 29\bar{L}, \quad F^6 = 144N + 116L + 116\bar{N} \\ &+ 65\bar{L} \end{aligned}$$

推论 5 $\alpha = 1$ 时的泛函微分方程(*) (2)的 n -周期解数 N_n 为 $N_1 = 1, N_2 = 8, N_3 = 12, N_4 = 48, N_5 = 100, N_6 = 296$

通过对式(5)的具体推导, 可得¹⁾

$$\begin{aligned} \text{推论 6} \quad \alpha = 1 \text{时方程(*) (2)的 } F \text{的周期点为 } 1 \text{ 个周期点: } v &= \frac{2}{3}, \quad 8 \text{ 个 } 2\text{-周} \\ \text{期点: } v &= \frac{2}{17}, \frac{2}{15}, \frac{14}{33}, \frac{14}{31}, \frac{9}{17}, \frac{20}{33}, \frac{19}{31}, \frac{8}{15}; \quad 12 \text{ 个 } 3\text{-周期点:} \\ &\frac{6}{65}, \frac{10}{63}, \frac{18}{43}, \frac{58}{127}, \frac{34}{65}, \frac{26}{43}, \frac{28}{127}, \frac{41}{65}, \frac{40}{63}, \frac{28}{43}, \frac{83}{127} \end{aligned}$$

由于 F 映射(4)是不连续的, 不能直接应用Li-Yorke的3-周期定理⁽²⁾讨论混沌(Chaos)现象. 但可应用Marotto所推广的方法⁽³⁾证得

定理 6 对 $\alpha = 1$ 时的泛函微分方程(*) (2)存在混沌现象. 方程有任意次振动的周期解, 其周期可大于任意正数.

伍泳棠¹⁾用电子计算机辅助处理自动计算了方程(*) (2)的解. 验证了前面的论断.

最后, 我们就一般情形讨论泛函微分方程(*) (2). 由定理4和式(4), F 的映射图类似于图1, 仍由线段组成. 在 $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$ 区域与图1一样为 $Fv = 4v - 2$ (当 $\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{3}{4}$)和 $Fv = 0$ (当 $\frac{3}{4} \leq v \leq 1$). 故有一稳定不动点 $v = \frac{2}{3}$. 而在 $0 \leq v \leq \frac{1}{2}$ 区域则仍由四段斜线组成, 但斜率和上、下端点不同. 由 F 映射图可证: 仅当下端点小于 $\frac{2}{3}$ 时才存在大于1的周期点及混沌现象. 根据(4)式, 下端点在 $v = \frac{1}{8}$ 及 $v = \frac{7}{16}$

1) 伍泳棠, 一类非线性泛函微分方程周期解的计算机辅助处理, 全国第五届非线性振动会议论文集, 1989, 38~41

处, 此时相应的 $F = \frac{\alpha}{2}$. 利用参数 α 变化的单调性, 可得

定理 7 泛函微分方程 (*) (2) 存在一稳定 1-周期解 (相应于 $v = -\frac{2}{3}$). 而当 $\alpha \geq \frac{4}{3}$ 时方程不存在任何 n -周期解 ($n > 1$). 而当 $\alpha < \frac{4}{3}$ 时存在 $N(\alpha)$, 对任 $n \geq N(\alpha)$ 均存在 n -周期解和浑沌现象.

注 以上讨论的分段常数型 (1) 和 (2) 函数是间断函数, 在间断点处不连续. 实际上可仿照 Walther^[1], 在间断点处用一小段严格递增(减)曲线连接, 使其成为连续可微函数. 只要这样的小段曲线区间足够小, 文中讨论的结论仍成立, 在此不赘.

参 考 文 献

- [1] Walther H O, *J. Nonlinear Anal.*, 5(1981), 775~788
 [2] Li T Y et al., *Amer Math Mon*, 82(1975), 985~995
 [3] Marotto F R, *J. Math. Anal. Appl.*, 63(1978) 199~223

The Periodic Solution of the Autonomous Functional Differential Equations with a Piecewise Constant Function

Zhu Siming* Wu Yonglang

Abstract

We consider the autonomous functional differential equations

$$\dot{x}(t) = f(x(t-1)) \quad (\bullet)$$

with a piecewise constant function $f(x)$.

Making use of "Poincare map" and generalized theorem of Li-Yorke, we study the peiodic solution, oscillation and chaos behaviour of the equation.

Keywords functional differential equations, periodic solution, oscillation, chaos

* Department of Mathematics