

· 研究简报 ·

弹性梁振动系统的镇定

肖明庆 钟康

(中山大学数学系) (广东省建筑工程专科学校)

摘 要

用直接考虑弹性梁特征方程的方法,本文给出了当弹性梁的控制点和观测点的设计满足一定的条件时,弹性梁除了是能控和可观测外,还具有指数能稳的性质.同时还可以具体地确定渐近速率.

关键词 波动方程, 指数能稳性

1 引言

两端自由的弹性梁可用下面的一维波动方程描述^[1]

$$m(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = b(x)u(t) \quad (1)$$

$$0 < x < l$$

其中, l 为梁的长度,取梁的纵轴为 x 轴, $y(x,t)$ 距梁 $x=0$ 一端的坐标为 x ,时刻为 t 的垂直位移, $m(x)$ 为梁的质量分布, $E(x)I(x)$ 是梁的弯曲刚度分布.

两端边界条件

$$E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) \Big|_{x=0,l} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x)I(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t) \right) \Big|_{x=0,l} = 0 \quad (2)$$

初始条件

$$y(x,t) \Big|_{t=0} = y_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} y(x,t) \Big|_{t=0} = y_1(x) \quad (3)$$

在梁上设计 n 个点: $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < l$ 和包含 x_i 的区间 $\Delta_i = [x_i - \alpha_i, x_i + \alpha_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), α_i ($i = 1, 2, \dots, n$)是 n 个常数, $x_1 > \alpha_1, x_n + \alpha_n < l, \Delta_i \cap \Delta_{i+1} = \emptyset$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$). 令

$$g(x) = \begin{cases} k_i/2\alpha_i & \text{当 } x \in \Delta_i \\ 0 & \text{当 } x \notin \Delta_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

考虑反馈控制

$$u(t) = -\int_0^l g(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x} dx = -\sum_{i=1}^n k_i \frac{1}{2\alpha_i} \int_{\Delta_i} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t \partial x} dx \quad (4)$$

则实现反馈控制的闭环系统为

本文1989年5月27日收到

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b(x) \int_0^1 g(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} dx + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (5)$$

闭环系统的边界条件为(2)，初始条件为(3)。

弹性梁的反馈稳定问题是选择观测点的位置 x_1, x_2, \dots, x_n 及 $b(x)$ ，使闭环系统(5)的解 $y(x, t)$ 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(x, t)\|_{L^2(0,1)} = 0$$

令

$$D(A) = \left\{ y \in H \mid y, y', (E(x)I(x)y''), (E(x)I(x)y'')' \in AC[0,1], \right. \\ \left. (E(x)I(x)y'')'' \in H, E(x)I(x)y''|_{x=0,1} = (E(x)I(x)y'')'|_{x=0,1} = 0 \right\}$$

对 $y \in D(A)$ ，定义算子

$$(Ay)(x) = \frac{d^2}{dx^2} \left(E(x)I(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \quad (Gy)(x) = b(x) \int_0^1 g(x) \frac{d}{dx} y(x) dx$$

$$p = \frac{d}{dx} \quad \text{则} \quad Gy = \langle py, g \rangle b \quad \forall y \in D(p)$$

不失一般性，设 $m(x) \equiv 1$ ，那么闭环系统(5)可写成空间 $L^2(0,1)$ 中的发展方程

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + G \frac{dy}{dt} + Ay = 0 \\ y(0) = y_0 \quad \dot{y}(0) = y_1 \end{cases} \quad (6)$$

2 主要结果

定理 1 设在闭环系统(6)中， $\langle p\varphi_n, g \rangle_n \langle b, \varphi_n \rangle_n$ 是实数。如果存在 2 个正实数 α_1, α_2 使

$$0 < \alpha_1 \leq \langle p\varphi_n, g \rangle \langle b, \varphi_n \rangle \leq \alpha_2 < 2\sqrt{\mu_1} \quad (7)$$

对一切 n 成立，其中 $\{\varphi_n\}_1^\infty$ 是算子 A 的本征值相应的全体本征元，它在 $L^2(0,1)$ 中形成规范直交基。 μ_1 是 A 的最小本征值，且 如果 $g \in D(p^*)$ $y_0 \in D(A)$ ， $y_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ ，如果 $b \in D(A^{\frac{1}{2}})$ $y_0 \in D(A)$ ， $y_1 \in D(A)$

则系统(6)除了能观测和能控外还是指数能稳的。

为了证明定理 1，需要应用如下的结果

引理^[2] 如果 $g \in D(p^*)$ ， $y_0 \in D(A)$ ， $y_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ 或者，如果 $b \in D(A^{\frac{1}{2}})$ $y_0 \in D(A)$ ， $y_1 \in D(A)$ ，则系统(6)存在唯一解。

定理 1 证明 由对任意 $n \in J$ 有： $\langle p\varphi_n, g \rangle \langle b, \varphi_n \rangle \geq \alpha_1 > 0$ 直接由(1)知系统是能控和可观测的。

下面证明系统(6)是指数能稳的。

因为 A 的全体本征元 $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ 在 $L^2(0,1)$ 中形成规范直交基，故可设系统(6)的解 $y(t)$ 为

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k \varphi_k \quad (7)_1$$

初始条件为

$$y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} \varphi_k \quad (7)_2$$

$$y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} y_{1k} \varphi_k \quad (7)_3$$

将(7)₁, (7)₂, (7)₃代入系统(6), 注意到 $G \cdot = \langle p \cdot g \rangle b$ 可得

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 y_k}{dt^2} \varphi_k + \langle p \varphi_k g \rangle \frac{dy_k}{dt} b + \mu_k y_k \varphi_k \right) = 0 \\ y(0) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{0k} \varphi_k \quad \dot{y}(0) = \sum_{k=1}^{\infty} y_{1k} \varphi_k \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 y_k}{dt^2} \varphi_k + \langle p \varphi_k g \rangle \frac{dy_k}{dt} b + \mu_k y_k \varphi_k = 0 \\ y_k = y_{0k} \quad \dot{y}_k(0) = y_{1k} \end{cases} \quad (9)$$

$$\quad (10)$$

用 φ_l 作用(9)两边, 得

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} + \langle p \varphi_k g \rangle \langle b \varphi_k \rangle \frac{dy_k}{dt} + \mu_k y_k = 0 \quad (11)$$

结合(10), (11)可得一组常系数二阶常微分方程, 它对应的特征方程为

$$\lambda_k^2 + \langle p \varphi_k g \rangle \langle b \varphi_k \rangle \lambda_k + \mu_k = 0 \quad k \in J$$

$$\text{解得} \quad \lambda_k^{(l)} = \left[-\langle p \varphi_k g \rangle \langle b \varphi_k \rangle \pm i \sqrt{4\mu_k - \langle p \varphi_k g \rangle^2 \langle b \varphi_k \rangle^2} \right] / 2$$

$$(k \in J, l = 1, 2)$$

故得一组解表示为

$$y_k(t) = C_k^{(1)} e^{\lambda_k^{(1)} t} + C_k^{(2)} e^{\lambda_k^{(2)} t}$$

其中

$$\begin{cases} C_k^{(1)} + C_k^{(2)} = y_{0k} \\ \lambda_k^{(1)} C_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} C_k^{(2)} = y_{1k} \end{cases} \quad (12)$$

所以系统(6)的解 $y(t)$ 可表为

$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k^{(1)} e^{\lambda_k^{(1)} t} + C_k^{(2)} e^{\lambda_k^{(2)} t} \right) \varphi_k$$

$C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ 满足(12), 因为

$$\|y(t)\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\alpha_1 t} \lambda_k^{(1)} \left| \left(c_k^{(1)} + c_k^{(2)} \right) \cos I_m \lambda_k^{(1)} t + \left(c_k^{(1)} - c_k^{(2)} \right) \sin I_m \lambda_k^{(2)} t \right|^2 \tag{13}$$

注意到 $c_k^{(1)} + c_k^{(2)} = y_{0k}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \left| c_k^{(1)} + c_k^{(2)} \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|y_{0k}\|^2 = \|y_0\|^2$$

再由

$$c_k^{(1)} - c_k^{(2)} = \left[\left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} \right) y_{0k} - 2 y_{1k} \right] / \left(\lambda_k^{(2)} - \lambda_k^{(1)} \right)$$

$$\therefore \left| c_k^{(1)} - c_k^{(2)} \right|^2 \leq \frac{\left| \left(\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)} \right) y_{0k} - 2 y_{1k} \right|^2}{4\mu_1 - \alpha_2} \leq \frac{2 \left(\alpha_2^2 \|y_{0k}\|^2 + 4 \|y_{1k}\|^2 \right)}{4\mu_1 - \alpha_2^2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \left| c_k^{(1)} - c_k^{(2)} \right|^2 \leq \frac{2 \left(\alpha_2^2 \|y_0\|^2 + 4 \|y_1\|^2 \right)}{4\mu_1 - \alpha_2^2} \tag{14}$$

由(14)知(13)可变成

$$\|y(t)\|^2 \leq 2e^{-2\alpha_1 t} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left| c_k^{(1)} + c_k^{(2)} \right|^2 + \left| c_k^{(1)} - c_k^{(2)} \right|^2 \right)$$

$$\leq 2 \left[\|y_0\|^2 + \frac{2 \left(\alpha_2^2 \|y_0\|^2 + 4 \|y_1\|^2 \right)}{4\mu_1 - \alpha_2^2} \right] e^{-2\alpha_1 t}$$

$$\therefore \|y(t)\| \leq M \cdot e^{-\alpha_1 t}$$

其中

$$M = \sqrt{2 \left[\|y_0\|^2 + \frac{2 \left(\alpha_2^2 \|y_0\|^2 + 4 \|y_1\|^2 \right)}{4\mu_1 - \alpha_2^2} \right]^{1/2}} \quad \text{定理 1 证毕}$$

注 1 从定理 1 证明过程可知，定理条件中的 α_1 就是系统(6)的指数稳定系数，这给估算系统(6)的解趋于平衡点的速度提供了很大的方便。具有实践意义。

注 2 设 x_0 表示量测角速度的仪器的位置， x_1 表示控制点的位置，此时式(7)为

$$0 < \alpha_1 \leq \varphi_k(x_1) \varphi_k'(x_0) \leq \alpha_2 < 2\sqrt{\mu_1} \quad (k \in J)$$

即是开环振型 $\varphi_k(x)$ 在控制点 x_1 处的值 $\varphi_k(x_1)$ 必须与 $\varphi_k'(x_0) = \frac{d\varphi_k}{dx} \Big|_{x=x_0}$ 同号，也就是说，如果 $\varphi_k(x_1) > 0$ 则量测仪器的位置 x_0 应该位于振型 $\varphi_k(x)$ 的波腹点 x^* 的右端，反之应在 x^* 的左端，且它们的函数值之乘积应一致落在区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 内，

若稍放松定理 1 的条件，则可得

定理 2 在闭环系统(6)中，如果

(i) $\langle p\varphi_k g \rangle \langle b\varphi_k \rangle$ ($k=1, 2, \dots$) 是实数, 且存在一正实序列 $\{\alpha_n\}_1^\infty$ 使

$$0 < \alpha_k \leq \langle p\varphi_k g \rangle \langle b\varphi_k \rangle < 2\sqrt{\mu_{k+1}} \quad k \in J$$

(ii) $\inf_{k \in J} |2\sqrt{\mu_{k+1}} - \langle p\varphi_k g \rangle \langle b\varphi_k \rangle| = d > 0$

(iii) $g \in D(p^*)$, $y_0 \in D(A)$, $y_1 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ 或者

$$b \in D(A^{\frac{1}{2}}), \quad y_0 \in D(A), \quad y_1 \in D(A)$$

则系统(6)是可观测和能控的, 且是指数稳定.

$$\|y(t)\| \leq Me^{-\alpha_1 t}$$

其中 M 与 y_0, y_1 及 $\{\alpha_n\}_1^\infty$ 有关.

参 考 文 献

- [1] 王康宁, 分布参数控制系统, 科学出版社, 1986
 [2] 关肇直等, 中国科学, 1974, 4, 335~350
 [3] David L Russell, *SIAM REVIEW*, 20(1978), 4
 [4] 于景元等, 中国科学, 1984, 5, 473~482

The Feedback Stabilization of Elastic Beam with Free Boundary

Xiao Mingqing* Zhong Kang

Abstract

A physical model of elastic beam with free boundary is discussed.

It has been shown that when the control points and observable points satisfy certain conditions, the system has exponential stabilizability. We are also able to determine the asymptotic rate of the solution.

Keywords wave equation, exponential stabilizability

*Department of Mathematics, Zhongshan University