中山大学学报（自然科学版）
第30卷 第1期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.30 №.1
1991年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1991

·研究简报·

权函数为1的Gauss型求积公式的渐近展开*

黄友谦 陈泽鹏

（计算机科学系）

摘 要

利用Wegener核定理、Bernoulli多项式的三角级数展开，得到权函数为1的任意区间上的复化Gauss型求积公式的渐近展开式，它只含h的偶次幂项。

关键词 渐近展开，外推算法，数值积分

求积分 $If=\int_a^b f(x)\,dx$ 的值通常采用如下的近似公式

$$If\approx Tf=\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \tag{1}$$

即用被积函数$f(x)$在n个节点x_k处的值$f(x_k)$的线性组合来近似代替If。节点数n、节点x_k及对应的组合系数w_k的取法不同，就有不同的求积公式。为了提高积分的精度和研制相应的数值软件，本文从Wegener核定理出发，得到权函数为1的Gauss型求积公式的渐近展开式。

定理 （Wegener核定理）若$f(x)\epsilon c^r[a,b]$，$0\leqslant r\leqslant n$。则存在$r-1$次多项式$q_{r-1}(x)$使

$$f(x)+q_{r-1}(x)=\frac{1}{(b-a)\,r!}\int_a^b[x^r-(b-a)^r Br(\frac{x-t}{b-a})]f^{(r)}(t)\,dt \tag{2}$$

其中$B_k(x)$是[0，1]上的k次Bernoulli多项式，而在$(-\infty,\infty)$上作周期延拓。

证明 记(2)式右端函数为$F(x)$ 有

$$\begin{aligned}F^{(r-1)}(x)&=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b xf^{(r)}(t)\,dt-\int_a^b(b-a)B_1\left(\frac{x-t}{b-a}\right)f^{(r)}(t)\,dt\right]\\&=\frac{1}{b-a}\left[\int_a^b xf^{(r)}(t)\,dt-\int_a^x(b-a)\left(\frac{x-t}{b-a}-\frac{1}{2}\right)f^{(r)}(t)\,dt\right.\\&\left.-\int_x^b(b-a)\left(\frac{x-t}{b-a}+\frac{1}{2}\right)f^{(r)}(t)\,dt\right]=c+f^{(r-1)}(x).\end{aligned}$$

本文1989年12月28日收到

*此研究由中山大学高等学术研究中心基金会资助

其中c为常数，定理得证。

①应用于如下的Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (3)$$

的渐近估计。记

$$Rf=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right).$$

由于求积公式的代数精度为3，设$f(x)\epsilon c^4[-1,1]$，由Wegener核定理有

$$f(x)+q_3(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{x^4}{4!}-\frac{2^4}{4!}B_4\left(\frac{x-t}{2}\right)\right]f^{(4)}(t)\mathrm{d}t$$

因此

$$Rf=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{Rx^4}{4!}-\frac{2^4}{4!}R_xB_4\left(\frac{x-t}{2}\right)\right]f^{(4)}(t)\mathrm{d}t \quad (4)$$

易知$Rx^4=8/45$，故（4）式第一项为$(f'''(1)-f'''(-1))/270$，而

$$R_xB_4\left(\frac{x-t}{2}\right)=\int_{-1}^{1}B_4\left(\frac{x-t}{2}\right)\mathrm{d}x-B_4\left(-\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+t}{2}\right)-B_4\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}-t}{2}\right)$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{4!}{2^3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi(x-t)}{n^4}\mathrm{d}x+\frac{4!}{2^3\pi^4}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos n\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+t\right)+\cos n\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-t\right)\right]\Big/n^4$$

此式第一项的积分为零，故

$$R_xB_4\left(\frac{x-t}{2}\right)=96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{\sqrt{3}}\cos n\pi t}{(2n\pi)^4}.$$

所以对于权函数为1的两点Ganss型求积公式（3）有如下的渐近估计

$$Rf=\frac{1}{270}\left(f'''(1)-f'''(-1)\right)-2\sum_{l=1}^{\infty}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{l+n-1}\frac{\cos\frac{n\pi}{\sqrt{3}}}{(n\pi)^{(2l+4)}}\right]$$

$$\cdot\left(f^{(2l+3)}(1)-f^{(2l+3)}(-1)\right) \quad (5)$$

②考虑具有n个结点的Gauss型求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=1}^{n}w_kf(x_k) \quad (6)$$

假定n为偶数（奇数可类似讨论），w_k，x_k分别为权和Gauss节点，公式的代数精度为$2n-1$，令

$$Rf=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}w_kf(x_k),$$

根据Wegener核定理有

$$Rf=\frac{1}{2(2n)!}\int_{-1}^{1}\left[Rx^{2n}-2^{2n}R_xB_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)\right]f^{(2n)}(t)\mathrm{d}t$$

根据Gauss型求积公式的误差估计有

$$\frac{2}{2(2n)!}\int_{-1}^{1}Rx^{2n}f^{(2n)}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}\left(f^{(2n-1)}(1)-f^{(2n-1)}(-1)\right),$$

又

$$R_xB_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)=\int_{-1}^{1}B_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}w_kB_{2n}\left(\frac{x_k-t}{2}\right)\tag{7}$$

由Bernoulli多项式的三角级数展开，推知(7)式右端积分为零。故

$$R_xB_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)=-\sum_{k=1}^{n}w_k\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2\cdot(2n)!\cos j\pi(x_k-t)}{(2j\pi)^{2n}}$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}2\frac{(-1)^n(2n)!}{(2j\pi)^{2n}}\sum_{k=1}^{n}w_k\cos j\pi(x_k-t).$$

注意到x_k是关于原点对称的，且对称节点处的权系数相同，故有

$$R_xB_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^n4\cdot(2n)!}{(2\pi j)^{2n}}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}w_k\cos j\pi x_k\cos j\pi t$$

从而有

$$\frac{1}{2\cdot(2n)!}\int_{-1}^{1}2^{2n}R_xB_{2n}\left(\frac{x-t}{2}\right)f^{(2n)}(t)\mathrm{d}t$$

$$=(-2)^n\sum_{l=1}^{\infty}\left[(-1)^{l-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j\pi)^{2(n+l)}}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}w_k\cos j\pi x_k\right]$$
$$\cdot\left(f^{(2l+2n-1)}(1)-f^{(2l+2n-1)}(-1)\right).$$

由上述讨论可以得到形如(6)的Gauss型求积公式的渐近展开式为

$$Rf=\frac{2^{2n}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)}\left[f^{(2n-1)}(1)-f^{(2n-1)}(-1)\right]$$
$$+(-2)^n\sum_{l=1}^{\infty}\left[(-1)^{l-1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(j\pi)^{2(n+l)}}\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}w_k\cos j\pi x_k\right]$$
$$\cdot\left(f^{(2l+2n-1)}(1)-f^{(2l+2n-1)}(-1)\right)\tag{8}$$

③利用结果(8)推导在任意区间$[a,b]$上的复化Gauss型求积公式的渐近展开式。

设$f(x)$在区间$[a,b]$上充分可导，在$[a,b]$的n个相等的小区间上应用式(6)，令$h=(b-a)/n$，则有

$$If=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{-1}^{1}f\left(a+kh-\frac{h}{2}-\frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t$$

$$\approx G(h)=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p}w_l f\left(a+kh-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}x_l\right) \tag{9}$$

这里w_l、x_e分别为对应于（6）的Gauss型求积公式的权系数和节点，例如对$p=2$，利用（5）有

$$Rf=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}R\left[\int_{-1}^{1}f\left(a+kh-\frac{h}{2}+\frac{h}{2}t\right)\mathrm{d}t\right]$$

$$=\frac{h^4}{4320}\left[f'''(b)-f'''(a)\right]+\sum_{l=1}^{\infty}h^{2l+4}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{l+j}\frac{\cos\frac{j\pi}{\sqrt{3}}}{(2j\pi)^{2(l+2)}}$$

$$\cdot\left[f^{(2l+3)}(b)-f^{(2l+3)}(a)\right] \tag{10}$$

参考文献

〔1〕 F-J Delvos, Siegen, *Computing*, 38 (1987), 23～31

〔2〕 Lyness J N et al., *Math. Comp.*, 21(1967), 162～178

〔3〕 Diane L Johnson, *Journal of Aproximation Theory*, 53(1988), 239～250

〔4〕 徐利治等，高维数值积分，科学出版社，1980

The Asymptotic Expansion of Gauss-Legendre Integration with Weight Function Equal to One

*Huang Youqian** *Chen Zepeng*

Abstract

Wegener's kernel theorem and trigonometric series of Bernoulli polynomials are used to obtain the asymptotic expansion of Gauss-Legendre integration with weight function which is equal to one.

Keywords asymptotic expansion, extrapolation algorithm, numerical quadrature

* Department of Computer Science