

· 研究简报 ·

## 克服扭摆吊丝非线性影响的方法

管同仁 胡恩科

(物理学系)

### 摘 要

采取本底曲线扣除措施, 扣除扭摆吊丝弹性恢复力矩非线性变化和环境温度变化产生的系统误差, 可将扭摆的测量精度提高到 $9.6 \times 10^{-8}$ , 周期的最大相对起伏减小到 $9.4 \times 10^{-8}$ .

**关键词** 扭摆, 吊丝非线性校正, 固体潮

为了在更高精度上检验E. Saxl等人在日、月食期间所观察到的扭摆周期异常变化现象<sup>[1~3]</sup>, 我们研制了一台按自由衰减方式工作的扭摆<sup>[4]</sup>. 在改善扭摆的稳定性和测量精度的过程中, 我们设计了本底曲线扣除法和若干种抗干扰测量方法<sup>[5]</sup>. 经过8年多的实际使用, 证明这些方法效果显著. 本文仅介绍其中用以减小系统误差的本底曲线扣除法. 减小偶然误差的抗干扰方法将另文介绍.

### 1 吊丝弹性恢复力矩非线性变化产生的误差

自由衰减扭摆的运动方程为

$$I \ddot{\phi} + k \dot{\phi} + c\phi = 0$$

式中扭转弹性系数 $c$ 是转角 $\phi$ 的非线性函数, 可用幂级数表示

$$c(\phi) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \phi^j \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

当不计及非线性影响时,  $c(\phi) = c_0$ , (1)式的解为

$$\phi(t) = A(t) \cos \phi \quad (2)$$

式中,  $A(t) = \phi_0 e^{-(k/2)t}$ ,  $\phi = \omega_0 t + Q$ ,  $K = k/I$ ,  $\omega_0^2 = c_0/I$ ,  $\phi_0$ 为初始幅角,  $Q$ 为初相.

下面用慢变振幅法求扭摆周期. 将相位 $Q$ 看作是 $t$ 的函数, 对(2)式求导数, 略去结果中的高阶小量后, 把 $\phi$ ,  $\dot{\phi}$ 和 $\ddot{\phi}$ 等值代入方程(1), 得到

$$\dot{Q} = (1/IA\omega_0) \sum_{j=1}^{\infty} c_j (A \cos \phi)^{j+1} \cdot \cos \phi - (k/2) \sin 2\phi \quad (3)$$

本文1990年2月24日收到

设振幅  $A(t)$  在一周内变化很小, 可视为常数, 则  $\bar{Q}$  的平均值近似等于

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \frac{1}{T} \int_0^T Q dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{Q}{\omega_0} d\phi \approx \frac{3c_2 A^2}{8c_0} \omega_0 - \frac{15c_4 A^4}{48c_0} \omega_0 + \dots \\ &\approx B\omega_0 e^{-Kt} \quad (B = 3c_2 \phi_0^2 / 8c_0)\end{aligned}\quad (4)$$

用  $\bar{Q}$  代替  $Q$  求  $Q$  的总变化量  $\Delta Q$ ,

$$\Delta Q = \int_0^t \bar{Q} d\tau = \frac{B}{K} (1 - e^{-Kt}) \omega_0 \quad (5)$$

利用(2)式和(5)式求得扭摆周期为

$$\begin{aligned}T &= \frac{T_0}{1 + (B/Kt) (1 - e^{-Kt})} \approx \left[ 1 - \frac{B}{Kt} (1 - e^{-Kt}) \right] T_0 \\ &\approx \left[ (1 - B) + \frac{BK}{2} t - \frac{BK^2}{6} t^2 \right] T_0\end{aligned}\quad (6)$$

## 2 环境温度变化产生的误差

当环境温度变化时,  $T$  产生如下变化<sup>[4]</sup>

$$T_t = T_0 / [1 + \beta (t_r - t_0)] \approx (1 + \beta t_0 - \beta t_r) T_0 \quad (7)$$

式中  $\beta = \beta_c + \alpha_1 - \alpha_2$ ,  $(t_r - t_0)$  是环境温度变化量。

通常日月食持续时间只有 3~5h, 在此时间内, 扭摆的温度—时间曲线多为简单的单向弧度变化曲线, 因此可在不监测环境温度变化的情况下, 只用简单的 2 次 3 项式函数代替实际的  $t_r(t)$  函数, 对  $T$  进行校正, 便可以满足所需的精度要求。为此令

$$t_r(t) = t_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad (8)$$

把上式代入(7)式中, 得到扭摆周期

$$T_t = (1 - \beta b_1 t - \beta b_2 t^2) T_0 \quad (9)$$

将(9)式与(6)式合并, 得到扭摆周期的综合表达式

$$T = \left[ (1 - B) + \left( \frac{1}{2} BK - \beta b_1 \right) t - \left( \frac{1}{6} BK^2 + \beta b_2 \right) t^2 \right] T_0 \quad (10)$$

## 3 实验结果

测量结果用标准差和周期变化曲线两种方式共同表示。具体的数据处理步骤为:

(1) 按照最小二乘法原则用原始测量值做曲线拟合, 分别求出描绘原始测量值曲线用的 9 次 10 项式和描绘本底曲线用的 2 次 3 项式。

(2) 将 10 项式与 3 项式相减, 用差值  $\Delta T$  描绘周期变化曲线。

(3) 将原始测量值与相应的 3 项式值相减, 求出扣除系统误差后的周期变化值。

(4) 将原始测量值与相应的 10 项式值相减, 利用差值求标准差  $\sigma$ 。

处理数据时, 如发现周期出现异常变化, 可将数据分区处理。

图 1~3 给出了 1990 年 2 月 12 日 23 时至 13 日 4 时的扭摆数据处理结果。为了缩短图形的横向尺寸, 图中各点标的都是 10 个相邻周期的平均值。从图 1 和图 2 可以看出, 即使扭摆在大幅角下工作, 实验结果也与(10)式的理论结果较好地一致,

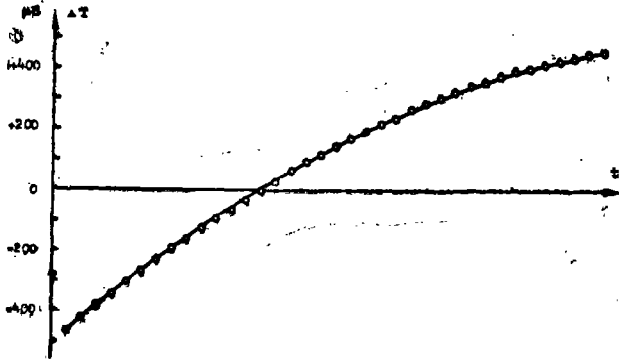


图1 扣除周期平均值后的周期变化曲线

Fig. 1 The period change curve which the period average has been deducted

图2 扣除直线本底后的周期变化曲线  
Fig. 2 The period change curve which the linear background has been deducted

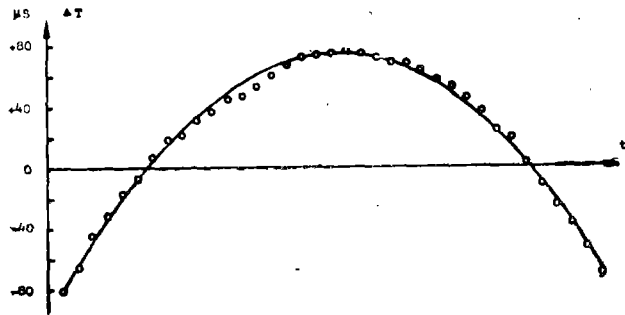


图3 扣除曲线本底后的周期变化曲线

Fig. 3 The period change curve which the non-linear background has been deducted

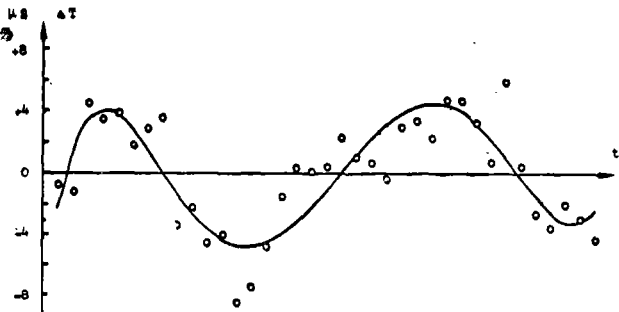


表1 给出的是有关参量。从表1 数据可知,本底曲线扣除法可将相对误差减小60倍,将周期的最大起伏降低105倍,因此它是采用高精度扭摆检验周期异常变化现象时的不可少的数据处理方法。

表1 本底曲线扣除法的效果

Tab. 1 The results which the background curve has been deducted

处理方式	相对误差 $\sigma/T$	改善系数 $\gamma_1$	周期的最大单向相对起伏 $\Delta T_{\max}/T$	改善系数 $\gamma_2$
原始值	$5.76 \times 10^{-6}$		$9.85 \times 10^{-6}$	
扣除直线本底	$1.01 \times 10^{-6}$	5.70	$1.72 \times 10^{-6}$	5.72
扣除曲线本底	$1.2 \times 10^{-7}$	48	$9.4 \times 10^{-8}$	105
扣除原始曲线	$9.6 \times 10^{-8}$	60		

注:  $T = 48.831170s, \phi_0 = 120^\circ$

#### 4 结论和讨论

(1) 采用本底曲线扣除法后, 扭摆的测量精度和稳定度提高到 $9.6 \times 10^{-8}$ 和 $9.4 \times 10^{-8}$ , 分别比Saxl扭摆<sup>[2,3]</sup>的相应参数高200倍和2800倍以上。

(2) 图3的曲线显示, 扭摆周期的起伏具有明显的周期性, 接近地球的固体潮运动周期, 这表明, 扭摆运动受固体潮影响较大。

(3) (4)式的结果表明, 扭摆弹性系数中的奇次项 $c_1$ 对扭摆周期不产生影响。〔7〕文引用〔5〕文中的本底曲线扣除法时, 由于在推导运动方程时, 令 $c = c_0 + c_1|\phi|$ , 对转角 $\phi$ 取绝对值, 将单向性赋与 $\phi$ , 使 $c_1$ 起作用, 而在解扭摆运动方程时, 却又将双向性赋与 $\phi$ , 因而该文引用的实验曲线与该文计算出的指数曲线不相符, 而与本文导出的2次3项式曲线相符。

(4) 〔7〕文作者提出, 如果在扭摆摆盘下方再对称地安装一根非线性特性完全相同的悬丝, 就可以使非线性影响自行抵销。我们认为这一方法难以取得预期效果, 原因如下: ①由于上悬丝比下悬丝多承受一个摆盘重力, 因此两悬丝不能满足非线性特性全同的条件。②当环境温度变化时, 悬丝的长度变化将被迫等于扭摆框架的高度变化, 同时悬丝的张力也将随框架高度变化, 以致悬丝将失去热膨胀系数极小和张力恒定的优点。这样, 扭摆周期变化不仅不会减小, 反而会增大, 变化的随机性也增强。

#### 参 考 文 献

- 1 Saxl E J. Nature, 1964; 203(11); 136
- 2 Saxl E J, Allen M. Phys Rev, 1973; D3; 823
- 3 张平华. 物理学报, 1980; 29; 1479
- 4 陈湘湘, 陈加言, 管同仁. 物理学报, 1982; 31(10); 1289
- 5 管同仁, 胡恩科. 科学通报, 1984; 4; 1487  
Guan Tongren, Hu Enke. Kexue Tongbao, 1985; 30(8); 1036
- 6 Saxl E J, Allen M. J Appl Phys, 1969; 40; 2449
- 7 唐孟希. 物理学报, 1989; 38(1); 170

### A Method to Overcome the Non-linear Influence of the Suspending Wire of the Torsion Pendulum

Guan Tongren\* Hu Enke

#### Abstract

The period drift of a torsion pendulum depends on the change of environment temperature and the non-linear property of spring restoring moment of suspending wire of the torsion pendulum. To reduce this system error, a method of deducting background curve has been adopted. As a results, the [measurement precision of the torsion pendulum,  $9.6 \times 10^{-8}$  and the maximum relative fluctuation of the period,  $9.4 \times 10^{-8}$  have been reached.

**Keywords** torsion pendulum, non-linear correction of the suspending wire, solid tide]

\* Department of Physics