第30卷 第1期 中山大学学报(自然科学版) Vol.30 №.1
1991年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1991

平面双曲方程组特征问题唯一可解性的离散现象(Ⅱ)*

吴兹潜 禤启沃 朱道元 钟钜康

(计算机科学系) (华南理工大学)

摘 要

本文在一般情况下建立了函数方程(2)唯一可解的充要条件，揭示了平面双曲方程组及其它一些问题唯一可解性发生离散现象的根本原因，在于函数方程(2)的有限维结构以及与方程(2)有紧密关系的某个矩阵的特征性质。

关键词 函数方程，双曲方程组，离散现象

1 引 言

二阶常系数双曲型方程(组)的特征问题(特征线支柱相交于一点)[1,2]与复合一混合型偏微分方程组某些边值问题[3]的唯一可解性可以归结为函数方程

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x)+h(x),\quad |\alpha_i|<1 \tag{1}$$

的唯一可解性. 文[4]把方程组特征问题推广到不限制特征线支柱相交于一点；推广了的特征问题所相应的函数方程具有方程(1)的推广形式

$$f(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i f(\alpha_i x+\beta_i)+h(x),\quad |\alpha_i|<1 \tag{2}$$

文[4]建立了(2)在$C^n(R)$、$C^\infty(R)$解不唯一的充要条件，并在(2)某些特殊情况下给出在$C^\infty(R)$唯一可解的充要条件. 本文发展了文[4]的工作，在一般情况下给出方程(2)在$C^n(D)$、$C^\infty(D)$ ($D=\{x\,|\,|x|\leqslant b,\quad b\geqslant\max\limits_i\frac{|\beta_i|}{1-|\alpha_i|}\}$) 唯一可解的充要条件. 方程(2)唯一可解性问题的解决，将会促进与函数方程有关的微分方程和其它问题的研究.

2 函数方程(2)唯一可解性不成立的离散现象

设函数$h(x)$、$f(x)$的定义域为D：$-b\leqslant x\leqslant b$，其中b是任意不小于$\max\limits_i\frac{|\beta_i|}{1-|\alpha_i|}$的正数. 显然，对任意$x\in D$，$\alpha_i x+\beta_i$也属于$D$.

本文1988年4月20日收到

*本项研究由中山大学高等学术研究中心基金会资助

定理 1 记B为D上的有界函数集。若$Q_0=\sum_{i=1}^{l}|a_i|<1$，则对任意$h(x)\in\mathbf{B}$，恒有唯一的$f(x)\in\mathbf{B}$ 满足方程(2)，且$f(x)$按最大模连续依赖于$h(x)$。

证明 定义算符$L:Lf(x)\equiv\sum_{i=1}^{l}a_if(\alpha_ix+\beta_i)$。对任意$h(x)\in\mathbf{B}$，由$Q_0<1$，知级数$\sum_{i=0}^{\infty}L^ih(x)$在D绝对一致收敛，其极限$f(x)$适合方程(2)，且有估计

$$\|f(x)\|_\infty\leqslant\|h(x)\|_\infty/(1-Q_0) \tag{3}$$

故方程(2)在B有解。

任设$f(x)$、$h(x)\in\mathbf{B}$且适合方程(2)，则由于关系式(2)立知估计式(3)成立，这表明方程(2)的有界解是唯一的，且在最大模意义下连续依赖于$h(x)$。证毕。

推论 1（光滑性的传播性质） 在定理1条件下，若$h(x)\in\mathbf{C}^n(D)$，则方程(2)在B中的解$f(x)$也属于$\mathbf{C}^n(D)$。

由于函数方程(2)一般是由某些双曲型方程（组）归结出来的，所以它必然具有反映这些双曲方程（组）特点的性质，如推论1所描述的函数方程解光滑性的传播性质，恰恰反映了所考虑的双曲型方程（组）具有行波解的性质[1]。而定理1证明了函数方程(2)在有界区域求解的适定性，亦正好反映了所考虑的双曲型方程（组）定解问题解的数据依赖域的有界性质。

定理 2 设正整数n适合$Q_n=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$。若$h(x)\in\mathbf{C}^n(D)$，则方程(2)在$\mathbf{C}^n(D)$的解恒可表为

$$f(x)=\int_0^x\cdots\int_0^x g(x)\mathrm{d}x^n+\sum_{j=0}^{n-1}d_jx_j=\int_0^x g(\xi)\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}\xi+\sum_{j=0}^{n-1}d_jx_j \tag{4}$$

其中$g(x)$是函数方程

$$g(x)=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^ng(\alpha_ix+\beta_i)+h^{(n)}(x) \tag{5}$$

的唯一连续解（见定理1），而$d_j(0\leqslant j\leqslant n-1)$适合代数方程组

$$(E-\sum_{i=1}^{l}a_iB_i)(d_0,d_1,\cdots,d_{n-1})^T=(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})^T \tag{6}$$

这里，E为n阶单位矩阵，B_i为n阶矩阵，其第r行$(0\leqslant r\leqslant n-1)$第$s$列$(0\leqslant s\leqslant n-1)$的元素是

$$B_i^{rs}=\begin{cases}0, & r>s,\\ \binom{s}{r}\alpha_i^r\beta_i^{s-r}, & r\leqslant s,\end{cases}$$

$$e_j=\left[\overset{(j)}{h}(0)+\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\int_0^{\beta_i}\frac{g(\xi)(\beta_i-\xi)^{n-1-j}}{(n-1-j)!}d\xi\right]/j!$$

证明　设$f(x)\epsilon \mathbf{C}^n(D)$满足方程(2)，则$f^{(n)}(x)$满足方程(5)。由推论1，方程(5)有唯一的连续解$g(x)$，故$f^{(n)}(x)=g(x)$，从而$f(x)$可表为(4)的形式。把(4)代入方程(2)，经过运算和化简，便知多项式系数$d_j(0\leqslant j\leqslant n-1)$满足代数方程组(6)，反之，不难验证，当$g(x)$是(5)的连续解，诸$d_j$满足(6)时，由(4)表示的函数$f(x)$属于$C^n(\mathrm{D})$，且满足方程(2)。证毕。

推论 2　在定理2条件下，函数方程(2)在$\mathbf{C}^n(D)$的解存在性与解唯一性分别等价于代数方程组(6)的解存在性与解唯一性。

在函数方程(2)中，由于$|\alpha_i|<1$，故适合$Q_n=\sum_{i=1}^{l}|a_i\alpha_i^n|<1$的正整数$n$恒存在。推论2指出了(2)的解在特定的意义下是有限维的。

定理 3　在定理2条件下，方程(2)在$\mathbf{C}^n(D)$有唯一解的充要条件是

$$q_j=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\neq 1,\qquad 0\leqslant j\leqslant n-1 \tag{7}$$

证明　因代数方程组(6)的系数矩阵是上三角矩阵，主对角线元素为

$1-\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j(0\leqslant j\leqslant n-1)$，故(7)是(6)有唯一解的充要条件，由推论2，(7)也是(2)在$\mathbf{C}^n(D)$有唯一解的充要条件。证毕。

因矩阵$B=\sum_{i=1}^{l}a_i B_i$（见定理2）的特征值是$\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j(0\leqslant j\leqslant n-1)$，故定理3揭示了矩阵$B$在判别方程(2)唯一可解性上的重要性：(2)唯一可解性不成立等价于矩阵B具有一个等于1的特征值。

根据定理2和定理3，常数$\beta_i(1\leqslant i\leqslant l)$并不影响到函数方程(2)在$\mathbf{C}^n(D)$的解唯一性，然而当条件(7)不具备时，常数$\beta_i$是会影响到方程(2)在$\mathbf{C}^n(D)$解的存在性的。

推论 3　若$h(x)\epsilon \mathbf{C}^\infty(D)$，则方程(2)在$\mathbf{C}^\infty(D)$有唯一解的充要条件是：对一切非负整数$j$，$q_j=\sum_{i=1}^{l}a_i\alpha_i^j\neq 1$。

3　关于第一类函数方程的注记

参考线性积分方程的分类，我们称方程(2)为第二类函数方程，而称形为

$$\sum_{i=1}^{l+1}a_i^*f(\alpha_i^*y+\beta_i^*)=h^*(y) \tag{8}$$

的方程为第一类函数方程。本节对(8)稍作讨论。设

$$|\alpha_{m+1}^*|=|\alpha_{m+2}^*|=\cdots\cdots=|\alpha_{l+1}^*|=\max_{1\leqslant i\leqslant l+1}|\alpha_i|。$$

考虑$|\alpha_i^*|(m+1\leqslant i\leqslant l+1)$中存在某项比如$|\alpha_{l+1}^*|$大于其余诸项之和的情况，即

$$|a^*_{l+1}| > \sum_{i=m+1}^{l} |a^*_i|.$$

作变数替换 $x = \alpha^*_{l+1} y + \beta^*_{l+1}$，则方程(8)化为

$$f(x) = \sum_{i=1}^{l} a_i f(\alpha_i x + \beta_i) + h(x) \tag{9}$$

其中，

$$a_i = -a^*_i / a^*_{l+1}, \quad \alpha_i = \alpha^*_i / \alpha^*_{l+1}, \quad \beta_i = \beta^*_i - \beta^*_{l+1}(\alpha^*_i / \alpha^*_{l+1})$$

$$h(x) = \left(1/a^*_{l+1}\right) h^* \left[(x - \beta^*_{l+1})/\alpha^*_{l+1}\right],$$

而且

当$1 \leqslant i \leqslant m$时，$|\alpha_i| < 1$；

当$i > m$时，$|\alpha_i| = 1$，$\sum_{i=m+1}^{l} |a_i| < 1$.

显然当n为较大的自然数时，有

$$Q_n = \sum_{i=1}^{l} |a_i \alpha_i^n| < 1,$$

从而有类似本文定理2、定理3的结论。所不同的是：除非作$\beta_i = 0 (i > m)$，此时方程(9)仍可在有界闭区间讨论唯一可解性，否则方程(9)只能在$-\infty < x < \infty$中讨论，因为无论选定那一个闭区间D，总有$x_0 \in D$，使某个$\alpha_i x_0 + \beta_i$离开区间D。

例 $f(x) = cf(d - x) + af(\alpha x + \beta) + h(x)$ (10)

c、$d \neq 0$，$|\alpha| < 1$，$-\infty < x < \infty$。

(i) 若$|c| < 1$，则有自然数n适合$|c| + |a\alpha^n| < 1$。记

$$\mathscr{F}_n = \{f(x) \mid f(x) \in \mathbf{C}^n(\mathbf{R}), \sup_{x \in R} |f^{(n)}(x)| < +\infty\},$$

则对$\mathscr{F}_n$中任一$h(x)$，方程(10)在$\mathscr{F}_n$的解恒可表为

$$f(x) = \int_0^x g(\xi) \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n-1)!} d\xi + \sum_{j=0}^{n-1} d_j x^j$$

其中$g(x)$是方程

$$g(x) = c(-1)^n g(d - x) + a\alpha^n g(\alpha x + \beta) + h^{(n)}(x)$$

在$\mathscr{F}_n$的唯一解，而$d_j (0 \leqslant j \leqslant n-1)$适合代数方程组

$$\sum_{s=0}^{n-1} \{\delta_{rs} - [c\binom{s}{r}(-1)^r d^{s-r} + a\binom{s}{r}\alpha^r \beta^{s-r}] H(s - r)\} d_s = e_r, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1$$

其中
$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & r = s \\ 0, & r \neq s, \end{cases} \qquad H(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$e_r = [h^{(r)}(0) + c(-1)^r \int_0^d \frac{g(\xi)(d - \xi)^{n-1-r}}{(n-1-r)!} d\xi$$
$$+ a\alpha^r \int_0^\beta \frac{g(\xi)(\beta - \xi)^{n-1-r}}{(n-1-r)!} d\xi$$

(ii) 若$|c|>1$，作变数替换$y=d-x$，则方程化为$|c|<1$的情况。

(iii) 若$|c|=1$，作变数替换，方程(10)可写为

$$f(d-x)=cf(x)+af(\alpha d+\beta-\alpha x)+h(d-x) \tag{11}$$

联立(10)、(11)得

$$f(x)=c^2f(x)+af(\alpha x+\beta)+acf(\alpha d+\beta-\alpha x)+h(x)+ch(d-x) \tag{12}$$

易知(10)与(12)等价。把$c^2=1$代入(12)并作变数替换 $y=\alpha x+\beta$得

$$f(y)+cf(\alpha d+2\beta-y)=\tilde{h}(y) \tag{13}$$

其中

$$\tilde{h}(y)=\left[h\left(\frac{y-\beta}{\alpha}\right)+ch\left(d-\frac{y-\beta}{\alpha}\right)\right]\Big/(-a)$$

不难证明函数方程(13)有解的充要条件是

$$\tilde{h}(y)=c\tilde{h}(\alpha d+2\beta-y),$$

全体解为

$$f(y)=\Phi(y)+\tilde{h}(y)/2,$$

其中 $\Phi(y)$为 $f(y)+cf(\alpha d+2\beta-y)=0$ 的通解。

参 考 文 献

〔1〕 华罗庚等，二阶两自变数两未知函数的常系数线性偏微分方程组，科学出版社，1979

〔2〕 Hua Loo Keng et al., *Second-order syetems of partial differential equations in the plane*, Pitman Advanced Publishing Program, 1985

〔3〕 吴慈潜等，中山大学学报论丛（自然科学），7(1988)，1

〔4〕 吴慈潜等，中山大学学报（自然科学版），1985，2

Discrete Phenomena in Unique Solvability for Goursat's Problems of the Hyperbolic System of Second Order(Ⅱ)

Wu Ciqian　Xuan Qiwo　Zhu Daoyuan　Zhong Zukang*

Abstract

We give a necessary and sufficient condition for the unique solvability in C^n of the functional equations(2). The essence of the discrete phenomena in unique solvability for the problems of the hyperbolic system is the characteristic property of a matrix related to the functional equation(2).

Keywords functonal equation, hyperbolic system, discrete phenomena

* Department of Computer Science