第29卷 第4期 中山大学学报(自然科学版) Vol.29 №.4
1990年 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

抽象线性方程的条件最小二乘解*

陈云烽
(数学系)

摘　　要

在Hilbert空间上，讨论了在受凸集约束时，抽象线性方程的条件最小二乘解问题。得到了一般情况下解的存在性定理，研究了约束集是线性流形、一次不等式和二次不等式等特殊情形下解的存在唯一性问题，以及解集的分析表达式。

关键词　Hilbert空间，抽象线性方程，最小二乘解，凸集约束，广义逆算子

假设H_1和H_2是Hilbert空间，A是$H_1\to H_2$的线性算子，$b\in H_2$，那么抽象线性方程

$$Ax=b \tag{1}$$

的最小二乘解是指满足下式的$\hat{x}$：

$$\|A\hat{x}-b\|=\min_{x\in H_1}\|Ax-b\| \tag{2}$$

这个问题与线性算子的广义逆理论研究密切联系在一起。本文将在文[1,2]的基础上，讨论Hilbert空间中方程(1)在凸集约束下的条件最小二乘解的问题，推广了有限维空间的有关问题的结果，并为研究无限维控制系统提供了有用的工具。

1　CLS问题及其一般结果

CLS问题　给定凸集$C\subset H_1$，求$\hat{x}\in C$使

$$\|A\hat{x}-b\|=\min_{x\in C}\|Ax-b\| \tag{3}$$

称这个问题为方程(1)在凸集C约束下的最小二乘解问题，简记为CLS问题，问题的解就是满足(3)式的$\hat{x}$。

我们知道，H_1上的泛函

$$J(x)=\|Ax-b\|^2,\quad x\in H_1 \tag{4}$$

是Gateaux可微的[3]，且

$$DJ(x)=2(A^*Ax-A^*b) \tag{5}$$

式中，A^*是A的共轭算子。显然，式(3)等价于

$$J(\hat{x})=\min_{x\in C}J(x) \tag{6}$$

本文1989年2月21日收到

* 中山大学高等学术研究中心资助项目

当C是凸集时，根据变分不等式原理[4]，下面两个条件与条件（6）三者之间两两等价

Ⅰ：$\hat{x}\in C$，且$\langle DJ(\hat{x}),\ x-\hat{x}\rangle\geq 0$，$\forall x\in C$　　(7)

Ⅱ：$\hat{x}\in C$，且$\langle DJ(x),\ x-\hat{x}\rangle\geq 0$，$\forall x\in C$　　(8)

而且（6）式的解集是凸的（可能是空集）；若C闭，解集也闭。这里，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle$表示内积。因此，利用（5）式，可得

定理1　$\hat{x}\in C$是方程（1）的CLS问题的解，当且仅当

$$\langle A^*A\hat{x}-A^*b,\ x-\hat{x}\rangle\geq 0,\ \forall x\in C \tag{9}$$

或者

$$\langle A^*Ax-A^*b,\ x-\hat{x}\rangle\geq 0,\ \forall x\in C \tag{10}$$

而且解集是凸集；若C闭，解集也闭。

注记1　根据这结果可知：若$\hat{x}$是C的内点，则$\hat{x}$是（1）的CLS问题的解，当且仅当

$$A^*A\hat{x}=A^*b \tag{11}$$

根据 Hilbert 空间线性算子广义逆的理论[1]，方程(11)在H_1中有解，当且仅当$b\in D(A^+)$。这里，$D(A^+)$表示A的广义逆算子A^+的定义域。同时，方程(11)有解时，解集为

$$S=A^+b+N(A) \tag{12}$$

式中，$N(A)=\{x\,|\,Ax=0\}$；而且A^+b是S中范数最小的元。因此，有如下结果

注记2　若$C\cap S\neq\phi$，那么，$\hat{x}$是方程(1)的CLS问题的解，当且仅当$\hat{x}\in C\cap S$。

实际上，S是方程（1）无约束的最小二乘解问题的解集，其性质和计算方法可见于〔1〕，因此，对条件最小二乘解问题，应着重讨论$C\cap S=\phi$的情形，往后，称这种情形为正则情形。用反证法可得如下定理。

定理2　设C是H_1中含有内点的凸集，那么，方程（1）的CLS问题在正则情形时，其解不可能是C的内点。

由式（9）和(10)，可导出：(1)的CLS问题的任意两个解x_1和x_2都有$(x_1-x_2)\in N(A)$，因此，如下定理成立。

定理3　如果已知x_0是（1）的CLS问题的一个解，则问题的解集为

$$M=(x_0+N(A))\cap C.$$

2　直流形约束下的CLS问题

设约束集C是闭的直流形，即

$$C=a+T \tag{13}$$

其中，$a\in H_1$，T是H_1中的闭子空间。这时，有正交投影算子$P_T:H_1\rightarrow T$，使得

$$C=\{x\,|\,x=a+P_Ty,\ \ y\in H_1\} \tag{14}$$

因此，$\hat{x}$是（1）的CLS问题的解，当且仅当

$$\|A\hat{x}-b\|=\min_{y\in H_1}\ \|AP_Ty-(b-Aa)\|,$$

也即方程

$$AP_Ty=b-Aa \tag{15}$$

有最小二乘解$\hat{y}$。这时，$\hat{x}$和$\hat{y}$的关系为

$$\hat{x} = a + P_T\hat{y}.$$

注意到$x \in N(AP_T)$等价于$P_T x \in N(A)$，以及方程(15)存在最小二乘解的充分且必要的条件是

$$b - Aa \in D[(AP_T)^+],$$

下面定理成立。

定理 4　当C是(13)式所示的直流形时，(1)的CLS 问题有解，当且仅当 $(b - Aa) \in D[(AP_T)^+]$，这时，解集为

$$S_1 = a + P_T(AP_T)^+(b - Aa) + N(A) \tag{16}$$

注记 3　由(16)式可知：解唯一，仅当$N(A) = \{0\}$。

3　一次不等式约束下的CLS问题

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是H_1中给定的n个元，定义算子G：$H_1 \to R_n$如下：

$$Gx \triangleq \begin{pmatrix} \langle x, x_1 \rangle \\ \langle x, x_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, x_n \rangle \end{pmatrix}, \quad \forall x \in H_1 \tag{17}$$

又设 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)^T \in R_n$，这里，角标“$T$”表示转置。那么，集合

$$C = \{x \mid Gx \geq \alpha, \ x \in H_1\} \tag{18}$$

是H_1中的一个含有内点的凸集。其中，$Gx \geq \alpha$是一次泛函不等式组。用G^*表示G的共轭算子，则有

$$G^*\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i, \qquad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^T \in R_n \tag{19}$$

定理 5　当C如(18)式所示时，(1)的CLS问题在正则情形有解$\hat{x}$，当且仅当存在$\xi \in R_n$满足$\xi \geq 0$，且使得

$$\xi^T(G\hat{x} - \alpha) = 0 \tag{20}$$

和

$$G^*\xi = A^*(A\hat{x} - b) \tag{21}$$

证明　当所设条件成立，则有

$$\begin{aligned}\langle A^*(A\hat{x} - b), \ x - \hat{x} \rangle &= \langle G^*\xi, \ x - \hat{x} \rangle = \xi^T(Gx - G\hat{x}) \\ &= \xi^T(Gx - \alpha) - \xi^T(G\hat{x} - \alpha) \geq 0, \ \forall x \in C.\end{aligned}$$

根据定理 1，$\hat{x}$是问题的解。

反之，设$\hat{x}$是解，由于C有内点，且是正则情形，依定理 2，$\hat{x}$在C的边界上，所以，如果记

$$G\hat{x} - \alpha = (\beta_1, \ \beta_2, \ \cdots, \ \beta_n)^T \tag{22}$$

则有非空的自然数集M_1和M_2，满足

$$M_1 \cap M_2 = \phi \quad 且 \quad M_1 \cup M_2 = \{1, 2, \cdots, n\},$$

并使得：当$i \in M_1$时，$\beta_i = 0$；当$i \in M_2$时，$\beta_i > 0$。于是，$\hat{x}$也是(1)在约束条件

$$\langle x, \ x_i \rangle = \alpha_i, \quad i \in M_1$$

下的条件最小二乘解，根据Lagrange乘子法，有λ_i，$i \in M_1$，使得$\hat{x}$是泛函

$$F(x)\triangleq\|Ax-b\|^2+\sum_{i\in M_1}\lambda_i(\langle x,x_i\rangle-\alpha_i)$$

的极小元，从而有$DF(\hat{x})=0$，即

$$A^*(A\hat{x}-b)+\sum_{i\in M_1}\frac{\lambda_i}{2}x_i=0.$$

取
$$\xi_i=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_i}{2}, & i\in M_1\\ 0, & i\in M_2\end{cases}\tag{23}$$

记 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$，则有

$$A^*(A\hat{x}-b)=\sum_{i=1}^{n}\xi_ix_i=G^*\xi,$$

即(21)式成立；其次，由(22)，(23)式可知(20)式也成立；再用反证法可得$\xi\geq 0$。于是定理5得证。

注记4 应用定理3可知：在(19)式约束下，(1)的CLS问题的解集为

$$S_2=\{\hat{x}_0+x\,|\,Gx\geqslant\alpha-G\hat{x}_0\text{且}Ax=0\},$$

式中，$\hat{x}_0$是问题的一个解。因此，解唯一，仅当$N(A)\cap N(G)=\{0\}$。

4 二次不等式约束下的CLS问题

设H_1，H_2，H_3都是Hilbert空间，A是$H_1\to H_2$的线性算子，B是$H_1\to H_3$的闭线性算子，给定$b\in H_2$，$d\in H_3$，且$d\in D(B^+)$，那么，用二次泛函不等式表示的集合

$$C=\{x\,|\ \|Bx-d\|\leqslant\tau,\ x\in H_1\}\tag{24}$$

是H_1中的凸集，式中实数$\tau>0$。

如果记 $\tau_0=\|(I-BB^+)d\|$ (25)

式中I表示单位算子；那么，根据线性算子的广义逆理论，式(24)所示的集合

$$C=\begin{cases}\phi & \text{当}\tau<\tau_0,\\ B^+d+N(B) & \text{当}\tau=\tau_0;\end{cases}$$

而当$\tau>\tau_0$时，C是含有内点的闭凸集。因此，在式(24)的约束下，对(1)的CLS问题，着重应讨论$\tau>\tau_0$的情况。这时，如果$b\in D(A^+)$，那么，问题属正则情形，当且仅当

$$\|B(A^+b+x)-d\|>\tau,\ \forall x\in N(A)\tag{26}$$

定理6 设$b\in D(A^+)$，$\tau>\tau_0$且(26)式成立，那么，在(24)式约束下，$\hat{x}$是(1)的CLS问题的解，当且仅当

$$\|B\hat{x}-d\|=\tau\tag{27}$$

并存在实数$\lambda>0$，使得

$$(A^*A+\lambda B^*B)\hat{x}=A^*b+\lambda B^*d\tag{28}$$

证明 当(27)，(28)式成立时，即有

$$\langle B\hat{x}-d,\ B\hat{x}-d\rangle=\tau^2\tag{29}$$

$$A^*(A\hat{x}-b)=-\lambda B^*(B\hat{x}-d)\tag{30}$$

而对任何$x\in C$，有

$$\langle B\hat{x}-d,\ Bx-d\rangle \leqslant \tau^2 \tag{31}$$

从而，由(31)－(29)可得

$$\langle B^*(B\hat{x}-d),\ x-\hat{x}\rangle \leqslant 0, \quad \forall x\in C,$$

注意到$\lambda>0$和式(30)，得

$$\langle A^*(A\hat{x}-d),\ x-\hat{x}\rangle \geqslant 0, \quad \forall x\in C.$$

依定理 1，知$\hat{x}$是问题的解。

反之，若$\hat{x}$是解，由于(26)式成立，问题属正则情形，故$\hat{x}$不是C的内点，条件(27)成立，故可应用Lagrange乘子法得乘子λ满足式(28)，进而用反证法可得$\lambda>0$，因此，定理 6 得证。

注记 5　设x_0是(1)在(24)式约束下的CLS问题的一个解，那么，根据定理 3 可得问题的解集

$$S_3 = x_0 + N(A)\cap N(B).$$

因此，解唯一，仅当$N(A)\cap N(B)=\{0\}$。

本文所设的Hilbert空间，既可以是有限维的，也可以是无穷维的，因此，其结果可用于分布参数（控制）系统的研究；而且在具体问题的求解中，可借助线性算子广义逆的计算方法，建立实用程序，有关这方面的讨论，将另文论述。

参 考 文 献

〔1〕 Zuhain Nashed M, *Generalized Inverses and Application*, Academic Press, New York, 1976

〔2〕 黄　琳，数学学报，1982，3

〔3〕 Balakrishnan A V, *Applied Functional Analysis*, Springer-Vering, New York, 1976

〔4〕 Mosco U，变分不等式近似解引论（中译本），上海科技出版社，上海，1985

Problems for the Conditional Least Squares Solution of the Abstract Linear Equation

*Chen Yunfeng**

Abstract

Assume that H_1, H_2 are Hilbert spaces, $A\in L(H_1,H_2)$, $b\in H_2$. In this paper we discuss the problems for the conditional least squares solution of the abstract linear equation $Ax=b$ with convex set constrained. The general existence theorem of solution is derived. When the constrained convex set is linear manifold or linear inequalities or square inequalities, the existence and uniqueness conditions of the solution are also derived. On the basis of these results, computational methods can be obtained.

Keywords Hilbert space, abstract linear equation, least squares solution, convex set contrained, generalized inverse of linear operator

* Department of Mathematics