中山大学学报(自然科学版)
第29卷 第2期 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM Vol.29 No.2
1990年 UNIVERSITATIS SUNYATSENI 1990

关于代数图论的一些结果*

陈继承 余正雄
(中山大学计算机科学系) (广东省建设银行)

摘　要

给出了某一类图的特征值的上、下界以及任意简单连通图的极大完全子图的阶的下界。这些界比已知的结果好。

关键词　代数图论，极大完全子图

本文所讨论的图都是简单的连通图。记$A=A(G)$为图G的邻接矩阵，n为G的顶点个数，m为G的边数，d_j为G中顶点v_j的度。设λ_i为G的第i个特征值(亦即$A(G)$的第i个特征值)，$i=1,2,\cdots,n$。因为A是对角线元素全为零的对称(0,1)一矩阵，不妨约定有$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$。

本文将对恰好具有一组完美对集的$n=2l$阶的二分图的谱的上、下界作细致的分析。其结果将表述于定理1。

关于图G的极大完全子图的阶(记为$k(G)$)的算法是一个NP完全问题见[1]。利用拉格朗日乘数法求出$k(G)$的一个下界，这一下界只通过图G顶点的度序列表示，并且这个下界适合于任意的简单连通图。这一结果将表述于定理2。

1　一类二分图的谱的上、下界

定理1　设G是恰好具有一组完美对集的$n=2l$阶二分图，m是G的边数。又设G的特征值为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant-\lambda_l\geqslant\cdots\geqslant-\lambda_2\geqslant-\lambda_1,\lambda_k>0$，$k=1,2,\cdots,l$。则有不等式成立：

$$\left(\sqrt{\frac{c}{l}}+\sqrt{\frac{c-l}{k}}\right)^{-1}\leqslant\lambda_k\leqslant\sqrt{\frac{m}{l}}+\sqrt{\frac{m-l}{k}},\qquad k=1,2,\cdots,l$$

其中，$C=\sum_{i=1}^{l}\left(\lambda_i^{-2}\right)$。

定理1的证明由以下的一组引理完成。

引理1　如果图G存在奇数组完美对集，则$A(G)$满秩。

证明　由文[2]中(1.42)″式经简单计算后可得。

本文1988年11月28日收到
*中山大学高等学术研究中心基金会资助项目

引理 2 设G是一个简单的连通图。则下列命题等价[2-4]

(i) G是一个二分图；

(ii) G的特征多项式$P_G(\lambda)$有如下形式：

$$P_G(\lambda)=\lambda^n+a_2\lambda^{n-2}+a_4\lambda^{n-4}+\cdots=\lambda^pQ(\lambda^2)$$

这里Q是一个多项式，且当n为奇数时，$p=1$；当n为偶数时，$p=0$；

(iii) 对所有的奇数n，A^n的每一个对角元素为0；

(iv) G不包含长为奇数的圈。

注 引理 1 和引理 2 说明了定理 1 中关于G的特征值的假设的合理性。

引理 3[5] 设G为具有划分(R,C)的二分图，R和C分别为G的两个部顶点集合。则G恰好具有一组完美对集的充分必要条件是在R和C中的顶点可以重新排序，使得G的关联矩阵B是一个主对角线元素全为 1 的下三角矩阵。

引理 4 令$a=(a_1,a_2,\cdots,a_l)^T$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_l)^T$，$e=(\sqrt{l})^{-1}(1,1,\cdots,1)^T$都是$l$维实向量。又令$\alpha=(\sqrt{l})^{-1}\sum_{i=1}^{l}a_i$，$\beta=(\sqrt{l})^{-1}\sum_{i=1}^{l}b_i$。则有

$$\sum_{i=1}^{l}a_i^2\sum_{i=1}^{l}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{l}a_ib_i\right)^2\geqslant\alpha^2\sum_{i=1}^{l}b_i^2-2\alpha\beta\sum_{i=1}^{l}a_ib_i+\beta^2\sum_{i=1}^{l}a_i^2 \tag{1}$$

证明 构造$l\times3$阶矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & (\sqrt{l})^{-1} \\ a_2 & b_2 & (\sqrt{l})^{-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_l & b_l & (\sqrt{l})^{-1} \end{pmatrix}$$

则A^TA为一个3×3阶对称半正定矩阵，从而$\det(A^TA)\geqslant0$，等号成立当且仅当秩$(A)<3$。将$\det(A^TA)$按最后一列展开，稍加整理即可得（1）式。□

引理 5 设G是一个$n=2l$阶的二分图。设它的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l,-\lambda_1,-\lambda_2,\cdots,-\lambda_l$ $(\lambda_i\geqslant0)$。我们有

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2=m;\qquad \sum_{i=1}^{l}\lambda_i\leqslant\sqrt{ml}$$

其中，不等式中等号成立当且仅当$G=K_2$，又m为G的边数。

证明

$$A=\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

其中，B为图G的关联矩阵。故有

$$\operatorname{tr}(A^2)=2\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}=2m$$

又易得

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l\leqslant\sqrt{ml}\qquad\square$$

引理 6　设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$为一组实数且满足$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l$。定义一组实数$\lambda_{(j,k)}$（正整数$j$，$k$满足$j\leqslant k\leqslant l$）：

$$\lambda_{(j,k)}=\sum_{i=j}^{k}\frac{\lambda_i}{k-j+1}$$

则有　　$$\lambda_{(1,k)}\geqslant\lambda_{(j,k)}\geqslant\lambda_{(l,k)}\equiv\lambda_l$$

证明　首先证明$\lambda_{(j,k)}$关于j，k是同时单调不增的。事实上，

$$\lambda_{(j+1,k+1)}=\sum_{i=j+1}^{k+1}\frac{\lambda_i}{k-j+1}$$

$$\lambda_{(j,k)}-\lambda_{(j+1,k+1)}=\frac{1}{k-j+1}(\lambda_j-\lambda_{k+1})\geqslant 0$$

又类似地可得

$$\lambda_{(1,k)}\geqslant\lambda_{(j,k)},\qquad\lambda_{(j,k)}\geqslant\lambda_{(l,k)}\equiv\lambda_l\text{。}$$ 即得证 □

引理 7　设G是一个恰好具有一组完美对集的$n=2l$阶的二分图。则G的所有正特征值（由引理1知G无零特征值）$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$满足如下的不等式

$$0<\lambda_j\leqslant\sqrt{\frac{m}{l}}+\sqrt{\frac{m-l}{j}},\quad j=1,\cdots,l \tag{2}$$

证明　首先注意到对符合本引理条件的G，总有$m\geqslant l$成立。令e_i为l阶单位矩阵的第i列。定义两个l维向量a及b为

$$a=(a_1,a_2,\cdots,a_l)^T=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)^T$$

$$b=(b_1,b_2,\cdots,b_l)^T=\sum_{i=j}^{k}\frac{e_i}{k-j+1}$$

又令　　$\alpha=(\sqrt{l})^{-1}\sum_{i=1}^{l}a_i$，$\beta=(\sqrt{l})^{-1}\sum_{i=1}^{l}b_i$。代入(1)并注意到

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^2\leqslant ml\ \text{及}\ \sum_{i=1}^{l}a_ib_i=\lambda_{(j,k)}$$

经整理后可得

$$\lambda_{(j,k)}^2-2\sqrt{\frac{m}{l}}\,\lambda_{(j,k)}+\frac{m}{l}+\frac{l-m}{k-j+1}\leqslant 0$$

将$\lambda_{(j,k)}$解出得

$$\sqrt{\frac{m}{l}}-\sqrt{\frac{m-l}{k-j+1}}\leqslant\lambda_{(j,k)}\leqslant\sqrt{\frac{m}{l}}+\sqrt{\frac{m-l}{k-j+1}}$$

注意到　　$$\lambda_{(1,k)}\geqslant\lambda_{(j,k)}\geqslant\lambda_{(l,k)}\equiv\lambda_l$$

因此得

$$\lambda_{(j,k)}\leqslant\lambda_{(1,k)}<\sqrt{\frac{m}{l}}+\sqrt{\frac{m-l}{k}}$$

故得（2）。□

引理 8 设G是一个恰好具有一组完美对集的 $n=2l$ 阶的二分图，B是它的关联矩阵。则有

$$\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-2}=\mathrm{tr}[(B^*)^T B^*] \tag{3}$$

其中B^*是B的伴随矩阵，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l$是$G$的正特征值。

证明 图G的邻接矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$$

因此有（引理 3 保证了B^{-1}的存在）

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & (B^{-1})^T \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

由引理 1 知$B^*B=BB^*=\det(B)I_l=I_l$，其中I_l为 l 阶单位矩阵。从而有$B^{-1}=B^*$及

$$(A^{-1})^2=\begin{pmatrix} {B^*}^T B^* & 0 \\ 0 & B^*{B^*}^T \end{pmatrix}$$

注意对同阶的方阵P与Q，有$\mathrm{tr}(PQ)=\mathrm{tr}(QP)$，故有

$$\sum_{i=1}^{2l}\lambda_i^{-2}=\mathrm{tr}(A^{-1})^2=2\mathrm{tr}\,({B^*}^T B^*)$$

即（3）得证。□

由引理 1 知，若A是恰好具有一组完美对集的二分图 G 的邻接矩阵，则A^{-1}存在且A^{-1}的特征值为$\pm\lambda_i^{-1}$，$i=1,\cdots,l$，其中 $n=2l$ 为 G的阶。若记 $c=\mathrm{tr}(B^{*T}B^*)$，则 c 等于 A^{-1} 的正特征值的平方和。

引理 9 设G是恰好具有一组完美对集的$n=2l$阶二分图，m是G的边数。又设G的特征值为$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_l\geqslant-\lambda_l\geqslant\cdots\geqslant-\lambda_2\geqslant-\lambda_1$，$\lambda_k>0$，$k=1,2,\cdots,l$。则有

$$\lambda_k\geqslant\left(\sqrt{\frac{c}{l}}+\sqrt{\frac{c-l}{k}}\right)^{-1} \tag{4}$$

其中$c=\mathrm{tr}(B^{*T}B^*)$，而B^*如引理 8 中所定义。

证明 令

$$a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_l)^T=\left(\lambda_l^{-1},\ \lambda_{l-1}^{-1},\ \cdots,\ \lambda_1^{-1}\right)^T$$

$$b=(b_1,b_2,\ \cdots,\ b_l)^T=\sum_{i=j}^{k}\frac{e_i}{k-j+1}$$

此处e_i为 l 阶单位矩阵的第 i 列，$i=j,\cdots,k$。

由引理 4 不难得到

$$c(k-j+1)^{-1}-\lambda_{(j,k)}^{-2}\geqslant\frac{1}{l}\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-1}\right)^2(k-j+1)^{-1}-2(\sqrt{l})^{-1}\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-1}\right)$$

$$\cdot \frac{\sum b_i}{\sqrt{l}}\left(\lambda^{-1}_{(j,k)}\right)+cl^{-1} \tag{5}$$

因为

$$\left(\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-1}\right)^2=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-2}+2\sum_{i\neq j}(\lambda_i\lambda_j)^{-1}\leqslant\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-2}+2(l-1)\sum_{i=1}^{l}\lambda_i^{-2}=lc$$

以之代入（5）式并加以整理得

$$\left(\lambda_{(j,k)}\right)^{-2}-2\sqrt{\frac{c}{l}}\left(\lambda_{(j,k)}\right)^{-1}+\frac{l}{k-j+1}+\frac{c}{l}-\frac{c}{k-j+1}\leqslant 0$$

取$k=j$，注意$\lambda_{(k,k)}=\lambda_k$，$k=1,2,\cdots,l$，对$\lambda_k$解上述不等式得

$$0<\frac{1}{\lambda_k}\leqslant\sqrt{\frac{c}{l}}+\sqrt{\frac{c-l}{k}},\qquad k=1,2,\cdots,l$$

故有（4），□

引理 1 至引理 9 一起完成了定理 1 的证明。

2　关于极大完全子图的阶的一个下界

定理 2　设G是一个n阶简单连通图，d_i是G的顶点v_i的度，$i=1,2,\cdots,n$。用$k(G)$表示G的极大完全子图的阶，则有

$$k(G)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{d_i}\right)\Big/\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{d_i}-2\right) \tag{6}$$

证明　设

$$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\sum_{i=1}^{n}x_i=1,\ x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\}$$
$$D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n),\qquad \Delta=D-A,$$
$$x^T=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\epsilon S.$$

考虑如下的极值问题：

$$\min_{x\epsilon s}(x,Dx)$$

其中，$(\cdot,\cdot)$为欧氏空间中的标准内积。因为S为有界闭区域，而(x,Dx)是x在S上的连续函数，故所要求的极小值存在。用拉格朗日乘数法不难得出

$$\min_{x\epsilon s}(x,Dx)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)^{-1}.$$

又有下式[6]

$$\max_{x\epsilon s}(x,Ax)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k(G)}\right)$$

因为$(x,\Delta x)=(x,Dx)-(x,Ax)$，故

$$\min_{x\epsilon s}(x,\Delta x)\geqslant\min_{x\epsilon s}(x,Dx)-\max_{x\epsilon s}(x,Ax)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}\right)^{-1}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{k(G)}\right)$$

注意Δ为对称半正定矩阵，且若取$x^T=\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \cdots, \frac{1}{n}\right)$，则有$(x,\Delta x)=0$，即

$\min\limits_{x\in s}(x,\Delta x)=0$。由上一不等式解出$k(G)$得(6)。

定理2证毕。□

设以$a(G)$表示图G的极大独立集的阶数，注意图G的补图与图G的关系（即$a(G)$恰好是$\bar{G}$的极大完全子图的阶），则由定理2可得如下推论。

推论 设G是一个简单连通图，$a(G)$为图G的极大独立集的阶数．则

(i)当G中无度为$n-1$的顶点时，有

$$a(G)\geqslant\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i)^{-1}\Big/\left[\sum_{i=1}^{n}(n-1-d_i)^{-1}-2\right]$$

(ii)当图G中恰好有$n-s$个顶点度为$n-1$，$1\leqslant d_i\leqslant n-1$时，有

$$a(G)\geqslant\sum_{i=1}^{s}(n-1-d_i)^{-1}\Big/\left[\sum_{i=1}^{s}(n-1-d_i)^{-1}-2\right]$$

比较[1]中结果，定理2的结论简单明晰而且便于计算。

参 考 文 献

〔1〕 Herbert S Wilf, *Journal of Combinational Theory, Series B*. 48(1985), 113～117

〔2〕 Cretkovic, Doob, Sachs, *Spectra of Graphs*, Berlin,1982

〔3〕 Bondy J A et al., *Graph Theory with Applications*, 1976

〔4〕 Harary F, *Graph Theory*,1969

〔5〕 Godsil, C D, *Inversrses of Trees*, Combinatorica, 1985, 33～39

〔6〕 Mortzkin T et al., *Canadian J. Math.*, 17(1965), 533～540

Some Results on Algebraic Graph Theory

*Chen Jicheng** *Yu Zhengxiong*

Abstract

We give upper and lower bounds for the eigenvalues of a particular class of graphs. Also, a lower bound for the order of a maximal complete subgraph of a simple connected graph is established. These results are better than the known ones.

Keywords Algebraic graph theory, maximal complete subgraph

*Department of Computer Sicence