

波浪在有浅滩的波浪槽里的传播*

朱蔚文 张应元 龚伟民
(应用力学与工程系)

摘 要

用杂交有限元方法计算波浪在有浅滩的波浪槽里的绕射和反射;控制方程为含地形变化和能量耗损的二维波动方程。其中的地形变化包括慢变分量和小振幅快变分量。能量耗损可根据不同的物理模型使用不同的公式,并以实例对方法的数值计算结果作了验证。

关键词 缓变坡度, 散射, 耗损

自Berkhoff(1972)^[1]最初推出的缓变坡度方程后,已经有不少人用有限元方法研究了波浪散射问题^[2~4]。这些模型均已被应用到工程实际;如计算港湾的谐振等^[5]。

本文在Kirby(1986)^[6]的波动方程的基础上,加上能量耗损项。基于此方程,用杂交有限元法计算了等宽直渠道,其中间部位有一浸没于水下的圆球体部分的波浪散射问题。散射的远场用等深度的特征函数解,近场用有限元法计算;远场和近场解要求两区域边界上压力和流量连续。将数值计算结果与实验数据进行比较表明,在球体浸没深度较大时两者符合较好,当浸没水深较小时两者相差较大。

1 模型方程和边界条件

Berkhoff^[1](1972)推导出一个描述在慢变水深上短波传播的二维波动方程:

$$\nabla \cdot (p \nabla \varphi) + q \varphi = 0 \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (1)$$

其中

$$p = c c_g = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (2)$$

$$q = \omega^2 \frac{c_g}{c} = \frac{\omega^2}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad (3)$$

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (4)$$

ω 为圆频率, k 为波数, c 为相速度, C_g 为群速度和 φ 为平均自由面的速度势。

本文1989年12月15日收到

*广东省自然科学基金资助课题

基于文[6]我们推出一个单色小振幅波通过具有缓变坡度和快变小波动坡度地形的深度积分波动方程，令 $h(x,y)$ 为总水深

$$h(x,y) = \bar{h}(x,y) + \tilde{h}(x,y) \tag{5}$$

其中 \bar{h} 为满足缓变假设 $O(\Delta\bar{h}/k\bar{h}) \ll 1$ 的水深。 \tilde{h} 为关于平均水深的小波动快变水深并有 $O(k\tilde{h}) \ll 1$ 。具有频率为 ω 的单色波系的自由面位移 ζ 为

$$\zeta(x,y,t) = \eta(x,y)e^{-i\omega t} \tag{6}$$

模型方程表示为

$$\nabla \cdot \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) \nabla \eta \right] + \left(k^2 cc_g + i\omega W \right) \eta = 0 \tag{7}$$

其中

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), W \text{ 表示每波长单位波能的能量耗损比率。} k \text{ 为满足下列色散}$$

关系的波数

$$\omega^2 = gk \tanh k\bar{h} \tag{8}$$

$c = \omega/k$ 和 $c_g = d\omega/dk$ 分别为相速度和群速度。

相应的速度分量和压力分量可以表示成与自由面位移有关

$$(u,v) = \frac{ig}{\omega} \frac{\cosh k(z+\bar{h})}{\cosh k\bar{h}} \nabla \eta \tag{9}$$

$$w = \frac{igk}{\omega} \frac{\sinh k(z+\bar{h})}{\cosh k\bar{h}} \eta \tag{10}$$

$$p = -\rho g \frac{\cosh k(z+\bar{h})}{\cosh k\bar{h}} \eta \tag{11}$$

其中， z 为垂直向上为正， $z=0$ 表示静止水深位置。

2 杂交有限元法

上述方程的边值问题可以使用类似于 Chen 和 Mei (1974) 所提出的杂交有限元方法解。区域被分为两部份 (如图 1 所示)：有限区域 A 和无限外区域 R 。内区域包含浸没的水下障碍物，外区域水深为常数。内区域 A 用有限单元离散，外区域 R 用本征函数解。总的波动可以写为入射波 (和反射波) η^I 以及散射波 η^S 的和

$$\eta = \eta^I + \eta^S \tag{12}$$

当入射波沿正 x 轴方向传播时 η^I 为

$$\eta^I = a_0 \exp(ikx) \tag{13}$$

幅射边界条件为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} + ik \right) \eta^S \rightarrow 0 \tag{14}$$

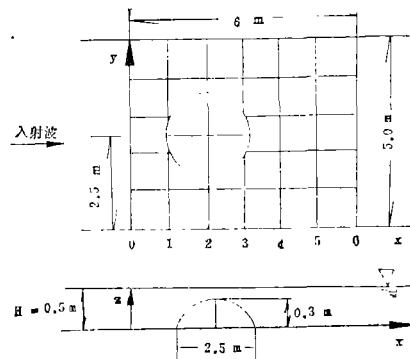


图 1 (Fig. 1)

本征函数项的自由面位移 η^s 可表示为

$$\eta^s = \sum_{n=0}^N A_n \exp\left(\pm i \sqrt{k^2 - k_n^2} x\right) \cos k_n y + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \exp\left(\pm i \sqrt{k_n^2 - k^2} x\right) \cos k_n y \quad (15)$$

其中 A_n 为待定系数, $k_n = \frac{n\pi}{B}$, $k^2 > k_N^2$, $k_{N+1}^2 > k^2$, B 为渠道宽度。

在区域 A 内, 可得出与求自由面位移 η 和散射波未知系数相对应的泛函表达式如下

$$\begin{aligned} F(\eta) = & \iint_A \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) (\nabla\eta)^2 - (k^2 cc_g + i\omega w) \eta^2 \right] \right\} dA \\ & + \int_{\partial A} \left[\frac{1}{2} cc_g \eta^s \frac{\partial \eta^s}{\partial n_A} \right] dl - \int_{\partial A} \left[cc_g \eta \frac{\partial \eta^s}{\partial n_A} \right] dl - \int_{\partial A} \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) \eta \frac{\partial \eta^I}{\partial n_A} \right] dl \\ & + \int_{\partial A} \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) \eta^I \frac{\partial \eta^s}{\partial n_A} \right] dl - \int_{\partial B} \left[\frac{1}{2} \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) a \eta^2 \right] \right] dl \\ & + \int_{\partial A} \left[\left(cc_g + \frac{g\bar{h}}{\cosh^2 k\bar{h}} \right) \eta^I \frac{\partial \eta^I}{\partial n_A} \right] dl \end{aligned} \quad (16)$$

区域 A 和 R 之间在交界面 ∂A 上要求自由面位移和法向速度连续条件已并入上式。泛函中的 η^I 和 η^s 的分析表达式被采用。无限级数(13)和(15)截断成有限项。

在内区域内使用线性三角单元。自由面位移 η 和水深 \bar{h} 和 \bar{h} 都被认为在每个单元内是线性变化的。将泛函(16)取极值则可得到一组关于在节点上的自由面位移和方程(13), (15)中的未知系数的线性代数方程组。系数矩阵是线性和带状的。用高斯消元法求解这些代数方程组。

3 计算实例与结果分析

计算5 m宽的波浪槽; 在其中部放置一球体局部的浅滩(如图1所示), 其相应水深为

$$\begin{aligned} h &= \bar{h} \quad (\text{当 } r > r_1 = 2.5 \text{ m 时}), \\ h &= -Z_c - (R^2 - r^2)^{1/2} \quad (\text{当 } r < r_1 \text{ 时}), \end{aligned}$$

其中, $r = [(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2]^{1/2}$; $(x_c, y_c, z_c) = (10.0 \text{ m}, 2.5 \text{ m}, -2.884 \text{ m})$; $R = 2.754 \text{ m}$ 。

入射波和波浪槽水深分两种情况(简称情况(1)和情况(2)), (1)为: 振幅 $a = 2.425 \text{ cm}$, 周期 $T = 1.79 \text{ s}$, 水深 $\bar{h} = 0.5 \text{ m}$; (2)为: $a = 2.345 \text{ cm}$, $T = 1.58 \text{ s}$, $\bar{h} = 0.43 \text{ m}$ 。

由于流动的对称性, 我们仅计算半个区域。数值计算区域为(座标选取如图1所示):

$$0 < x < 7.0 \text{ m}, \quad 0 < y < 2.5 \text{ m}$$

总计算单元数为560个, 节点319个。

情况(1)的计算结果和试验结果比较如图 2 (a), (b), (d); “+”为试验点, 虚线为用方程(1)计算结果, 实线为用方程(7)的计算结果; 由图可见两者相差不大, 数值结果与试验数据基本符合。情况 (2) 的结果如图 3 (a), (b), (c), (d)所示: 符号如同图 2; 由图可见用方程 (1)和 (7)计算结果相当一致, 但数值结果与试验结果相距甚远,

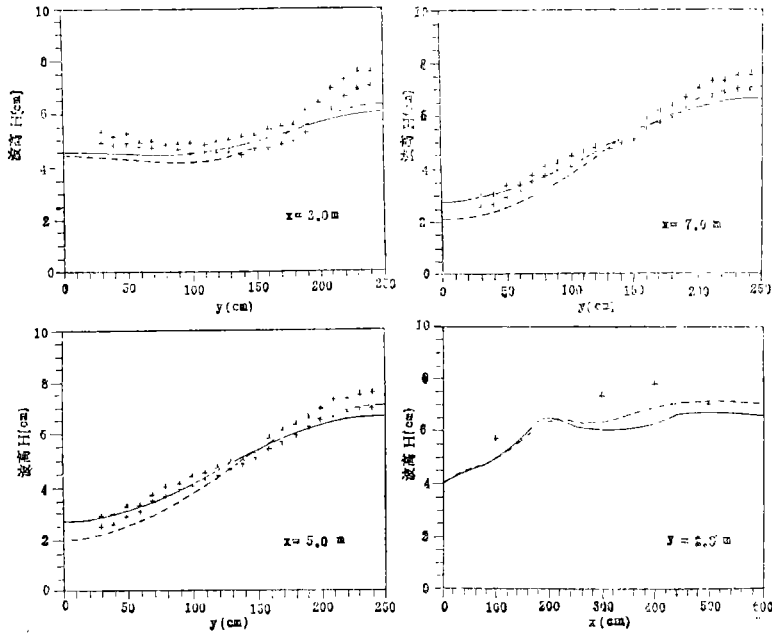


图 2 (Fig.2)

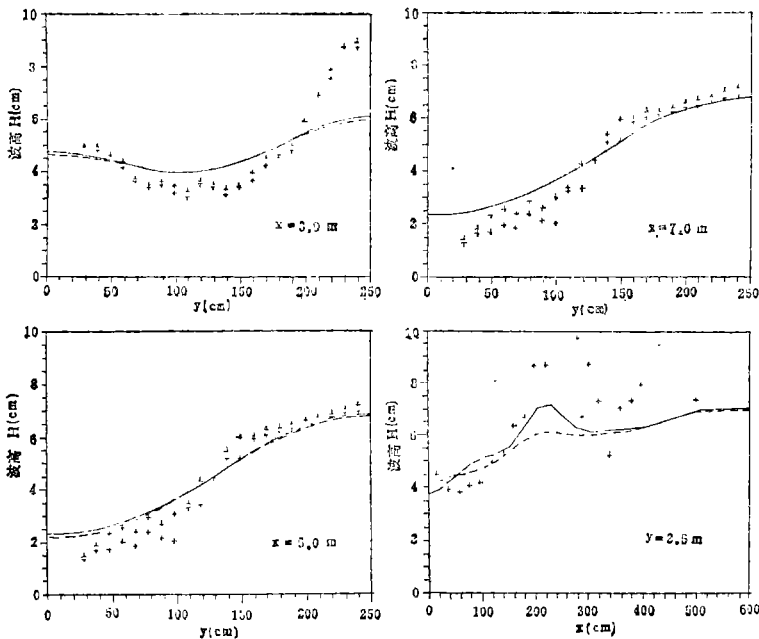


图 3 (Fig.3)

尤其在浅滩附近。原因在于浅滩和水槽水深之间相差由0.43m到0.13m,相当于是一个斜坡浅滩,当线性的入射波经过浅滩后发生了非线性畸变,原有的线性幅射条件的计算将不再适用。

由上述分析可得以下结论:

(1)把浅滩看成缓坡用方程(1)进行计算和把浅滩看成小振幅快变地形用方程(7)计算,结果相近。

(2)当水槽水深与浅滩最高处为 $\frac{\nabla \bar{h}}{k\bar{h}} < 0.5$ 时,数值结果与试验结果基本吻合,这种方法不仅可计算波在渠道(其中部份存在水下障碍物或浅滩)中的传播,同样可计算波浪在港口里的谐振(可根据实际情况加上能量耗损和岸边存在吸收)。

(3)当水槽水深与浅滩最高处为 $\frac{\nabla \bar{h}}{k\bar{h}} > 0.5$ 时,线性入射波通过浅滩后将发生非线性畸变,这时散射波的幅射条件应变为非线性的幅射条件。

参 考 文 献

- [1] Berkhoff J C W., *Proc. 13th Int. Conf. Coastal Engrg.*, 2(1972), 471~490
- [2] Bettess P et al., *Int. J. Numer. Methods in engrg.*, 2(1977), 1271
- [3] Houston J R., *Appl. Ocean Res.*, 3(1981), 4
- [4] Tsay T-K et al., *Applied Ocean Research*, 5(1983), 1, 30~37
- [5] Chen H S., "Hybrid element modeling of harbor resonance", 4th International conference on Applied Numerical Modeling, 1984
- [6] Kirby J T., *J. Fluid Mech.*, 162(1986), 171~186

Wave Propagation over a Shoal in a Wave Tank

Zhu Weiwen* Zhang Yingyuan Gong Weimin

Abstract

A finite element model is developed to calculate wave refraction, diffraction and reflection. The governing equation is a two-dimensional wave equation which includes the effects of topographical variation and energy dissipation. The bathymetric variation consists of a slowly varying component and a fast, small amplitude varying component. The energy dissipation term may be formulated for various physical mechanisms. A numerical result is presented.

Keywords mild-slope, scatter, dissipation

*Department of Applied Mechanics and Engineering