第30卷 第3期 1991年
中山大学学报(自然科学版)
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol.30 №.3 1991

·研究简报·

一阶半线性偏微分方程组的初边值问题

刘 运 康

(计算机科学系)

摘 要

研究一阶半线性方程组的初边值问题，得出了整体解、正解和局部解的存在唯一性、稳定性和渐近估计。

关键词 初边值问题，适定性，渐近估计

1 引 言

考虑一个描述散射过程的一阶半线性偏微分方程组

$$(u_i)_t+a_i(u_i)_x=f_i(x,t,u_1,\cdots,u_n),\quad 0<x<l,\ t>0,\ i=1,\cdots,n \tag{1}$$

其中 a_i 为实常数。研究如下形式的初边值问题：$u_i(x,t)$，$i=1,\cdots,n$，满足方程组(1)，而且当$a_i>0$时，$u_i(x,0)=\varphi_i(x),0\leqslant x\leqslant l$，$u_i(0,t)=\psi_i(t)$，$t\geqslant 0$，且$\varphi_i(0)=\psi_i(0)$；当$a_i=0$时，$u_i(x,0)=\varphi_i(x),0\leqslant x\leqslant l$； 当$a_i<0$时，$u_i(x,0)=\varphi_i(x),0\leqslant x\leqslant l$， $u_i(l,t)=\psi_i(t),t\geqslant 0$，且$\varphi_i(l)=\psi_i(0)$；其中$\varphi_i(x)\epsilon C[0,l]$，$\psi_i(t)\epsilon C[0,+\infty]$。

方程组(1)包含了文[1]研究的某些生物系统中提出的偏微分方程组，上述初边值问题包含了文[2]所研究的一阶变系数线性方程组的初边值问题和肖应昆[3]所研究的半线性一阶初边值问题耦合系统。

(1)的左端理解为$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i(x_0+a_it,t)$，其中$x_0=x-a_it$为固定的值，也就是说，在直线$x-a_it=x_0$上，未知函数$u_i(x,t)$关于自变量$t$连续可微。

对$i=1\cdots,n$，约定

$$f_i(x,t,u_1,\cdots,u_n)=0,\ \text{当}x<0\text{或}x>l\text{时},$$

$$f_i(u_1,\cdots,u_n)(x,t)=f_i(x,t,u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t)).$$

不难知道，求(1)的初边值问题的解等价于求积分方程组

$$u_i(x,t)=u_i^{(0)}(x-a_it)+\int_0^t f_i(u_1,\cdots,u_n)(x-a_i(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{2}$$
$$0\leqslant x\leqslant l,\ t\geqslant 0,\ i=1,\cdots,n,$$

在连续函数空间上的解，其中$u_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n$，形如：

本文1988年12月7日收到

i）当$a_i>0$时，$u_i^{(0)}(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \psi_i(-x/a_i), & x\leqslant 0;\end{cases}$

ii）当$a_i=0$时，$u_i^{(0)}(x)=\varphi_i(x)$，$0\leqslant x\leqslant l$；

iii）当$a_i<0$时，$u_i^{(0)}(x)=\begin{cases}\varphi_i(x), & 0\leqslant x\leqslant l,\\ \psi_i((l-x)/a_i), & x\geqslant l.\end{cases}$

以下称$\{u_i^{(0)}(x), i=1,\cdots,n\}$为方程组（1）的初边值函数组。

下面就方程组（1）的右端函数$f_i(1\leqslant i\leqslant n)$的不同性质，利用迭代方法研究解的适定性和渐近估计。

2　整体解

设函数$f_i(1\leqslant i\leqslant n)$关于$x,t$是区域，$Q_T=\{(x,t)\mid 0\leqslant x\leqslant l, 0\leqslant t\leqslant T\}$（$T$是任意的正常数）上的连续函数，且存在非负连续函数$M_i(x,t)$，使得对任意的$(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n)\epsilon R^n$，满足整体Lipschitz条件

$$|f_i(x,t,u_1,\cdots u_n)-f_i(x,t,v_1,\cdots,v_n|\leqslant M_i(x,t)(|u_1-v_1|+\cdots+|u_n-v_n|) \tag{3}$$

对Q_T上的连续函数$g(x,t)$，记$\|g\|_x=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant l}|g(x,t)|$，对$0<T_0\leqslant T$，记$M(T_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T_0}\sum\limits_{i=0}^{n}\|M_i(x,t)\|_x$，$F(T_0)=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T_0}\sum\limits_{i=0}^{n}\|\int_0^t f_i(u_1^{(0)},\cdots,u_n^{(0)}(x-a_i(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau\|_x$.

定理1　方程组（1）的初边值问题的解在Q_T上存在。

证明　按如下方式构造迭代序列$\{u_i^{(k)}(x,t); i=1,\cdots,n\}_{k=0}^{\infty}$：

$$u_i^{(0)}(x,t)=u_i^{(0)}(x-a_it),$$

$$u_i^{(k+1)}(x,t)=u_i^{(0)}(x,t)+\int_0^t f_i(u_1^{(k)},\cdots,u_n^{(k)})(x-a_i(t-\tau),\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

由（3）、（4）可知，对任意的$T_0\epsilon(0,T]$，当$(x,t)\epsilon Q_{T_0}$时，有估计式

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i^{(1)}(x,t)-u_i^{(0)}(x,t)\|_x\leqslant F(T_0),$$

$$\sum_{i=0}^{n}\|u_i^{(k+1)}(x,t)-u_i^{(k)}(x,t)\|_x\leqslant M(T_0)\int_0^t\sum_{i=0}^{n}\|u_i^{(k)}(x,\tau)-u_i^{(k-1)}(x,\tau)\|_x\mathrm{d}\tau, k\geqslant 1$$

利用归纳法，可得估计式

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i^{(k+1)}(x,t)-u_i^{(k)}(x,t)\|_x\leqslant F(T_0)M(T_0)^k t^k/k!,\quad k\geqslant 0 \tag{5}$$

取$T_0=T$，由上式可知，序列$\{u_i^{(k)}(x,t); i=1,\cdots,n\}_{k=0}^{\infty}$在$Q_T$上关于$x,t$一致收敛，由（4）知该序列的极限函数$\{u_i(x,t), i=1,\cdots,n\}$在$Q_T$上连续且满足（2），也就是说（1）的

初边值问题的解在Q_T上存在。

定理 2 方程组(1)的初边值问题的解是唯一且稳定的，所谓稳定是指如果$\{u_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$分别是(1)在$Q_T$上对应于初边值函数组$\{u_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n\}$的解，则

$$E(t)\leqslant E_0(t)\exp(M(t)t),\quad t\in[0,T] \tag{6}$$

其中 $$E(t)=\sum_{i=1}^{n}\|u_i(x,t)-v_i(x,t)\|_x,$$

$$E_0(t)=\sum_{i=1}^{n}\max_{0<x<l,0<\tau<t}|u_i^{(0)}(x-a_i\tau)-v_i^{(0)}\cdot(x-a_i\tau)|.$$

证明 记$D=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\sum\limits_{i=1}^{n}\|f_i(u_1,\cdots,u_n)(x,t)-f_i(v_1,\cdots,v_n)(x,t)\|_x$，由(2)、(3)可知，对$(x,t)\in Q_{T_0}$ $(0\leqslant T_0\leqslant T)$，可得

$$E(t)\leqslant E_0(T_0)+Dt,\quad E(t)\leqslant E_0(T_0+M(T_0)\int_0^t E(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

用归纳法，由以上两式可证得

$$E(t)\leqslant E_0(T_0)\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(M(T_0)t)^k+\frac{Dt}{(m+1)!}(M(T_0)t)^m,\ m\geqslant 1$$

令$m\to+\infty$，由上式可得 $E(t)\leqslant E_0(T_0)\exp(M(T_0)t)$，

在上式中，令$t=T_0$，然后用t代替T_0即得式(6)。以上过程中，若取$v_i^{(0)}(x)=u_i^{(0)}(x)$，由式(6)即知解是唯一的。

根据唯一性，利用式(5)和上述方法可得

$$\sum_{i=1}^{n}\|u_i(x,\ t)-u_i^{(0)}(x-a_it)\|_x\leqslant F(t)\exp(M(t)t) \tag{7}$$

式(6)、(7)说明(1)的初边值问题的解只连续地依赖时间$t_0\in[0,t]$内的信息，即$f_i(x,t_0,u_1,\cdots,u_n),\phi_i(t_0),\varphi_i(x),i=1,\cdots,n$。

由(2)直接可得

定理 3 如果存在实数μ，使得

$$f_i(x,t,u_1,\cdots,u_n)=O(t^{-\mu}),\ t\to+\infty,\ i=1,\cdots,n \tag{8}$$

对$x\in[0,l],(u_1,\cdots,u_n)\in R^n$一致成立，则(1)的初边值问题的解在$t\to+\infty$时有如下的渐近估计式

$$u_i(x,t)=\begin{cases}\phi_i(t-x/a_i)+xO(t^{-\mu}), & \text{当}a_i>0\text{时},\\ \varphi_i(x)+O(t^{-\mu+1}), & \text{当}a_i=0\text{时},\\ \phi_i(t-(l-x)/a_i)+(l-x)O(t^{-\mu}), & \text{当}a_i>0\text{时}.\end{cases} \tag{9}$$

注 文[3]在$n=2,a_1>0,a_2=0$的情形下讨论了(1)的初边值问题，得出了解的存在唯一性和类似于(7)的估计式([3,定理3])，其结果表明解u_1,u_2连续地依赖f_1,f_2,

$\varphi_1,\varphi_2\phi_1(t)$以及$\phi_1'(t)$，而本文的结果表明，解的稳定性并不依赖于$\phi_1'(t)$。

3 正 解

对$i=1,\cdots,n$，设函数$f_i(x,t,u_1,\cdots,u_n)$是定义在$(x,t)\epsilon Q_T$，$(u_1,\cdots,u_n)\epsilon R_+^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\epsilon R^n|x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\}$上的非负连续函数，且对任意的$(u_1,\cdots,u_n)$、$(v_1,\cdots,v_n)\epsilon R_+^n$，条件(3)成立。类似于定理1，2，3的证明，可得

定理4　如果初边值函数组$\{u_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n\}$非负，则方程组(1)的初边值问题在$Q_T$上有满足式(7)的解。

定理5　如果只考虑方程组(1)的初边值问题在非负连续函数空间上的解，则i)解是唯一的；ii)如果式(8)对$x\epsilon[0,l]$，$(u_1,\cdots,u_n)\epsilon R_+^n$一致成立，则解有渐近估计式(9)；iii)解是稳定的，即如果$\{u_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$分别是方程组(1)对应于非负初边值函数组$\{u_i^{(0)}(x,t),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i^{(0)}(x,t),i=1,\cdots,n\}$的解，则式(6)成立。

在实际问题中，未知量一般是非负的，因此限制解非负是很自然的。而且如果$f(x,t,u_1,\cdots,u_n)\geqslant 0$，$(x,t)\epsilon Q_T$，$(u_1,\cdots,n_n)\epsilon R^n$，则由(2)可知，只要$u_i^{(0)}(x)\geqslant 0$，$i=1,\cdots,n$，(1)的初边值问题不可能有负解。

4 局部解

记$G=\{(x,t,u_1,\cdots,u_n)\epsilon R^{n+2}|(x,t)\epsilon Q_T,|u_i-u_i^{(0)}(x-a_it)|\leqslant L_i,i=1,\cdots,n\}$，其中$L_i$是正常数。

对$i=1,\cdots,n$，设函数$f_i\epsilon C(G)$，且对任意的$(x,t,u_1,\cdots,u_n)$、$(x,t,v_1,\cdots,v_n)\epsilon G$，满足局部Lipschitz条件(3)。类似于定理1，2的证明，可得

定理6　方程组(1)的初边值问题在O_{T_0}上有满足式(7)的解，这里

$$T_0=\min\{T,\ \min_{1\leqslant i\leqslant n}\{L_i/\max_G|f_i(x,t,u_1,\cdots,u_n)|\}\}.$$

定理7　如果限制解$\{u_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$满足$(x,t,u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))\epsilon G$，则方程组(1)的初边值问题解唯一的。

定理8　设$\{u_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i(x,t),i=1,\cdots,n\}$分别是方程组(1)在$Q_T$上关于初边值函数组$\{u_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n\}$和$\{v_i^{(0)}(x),i=1,\cdots,n\}$的解，且对$(x,t)\epsilon Q_T$，函数$f_i$关于点$(x,t,u_1(x,t),\cdots,u_n(x,t))$、$(x,t,v_1(x,t),\cdots,v_n(x,t))$满足(4)，则估计式(6)成立。

注　把方程组(1)关于$(u_i)_x$的对角形系数矩阵推广为一般矩阵并令诸$f_i\equiv 0,n=2$，这就是文[5]所考虑的线性方程组。

参 考 文 献

1 Paternot J A E *et al*. Bull Math Biophy. 1972; 31
2 Pao. C V Bull Math Biology. 1978; 40: 107～121
3 肖应昆. 应用数学学报. 1987;(1):1～7
4 刘运康，吴兹潜. 中山大学学报（自然科学）论丛，1988; 7(1):40～45
5 禤启沃. 中山大学研究生学刊，1982; (1): 87～92

An Initial-Boundary-Value Problem for a First Order Semi-linear Systems of Partial Differential Equations

*Liu Yunkang**

Abstract

The uniqueness, existence, stability and asymptotic behavior of solutions of an initial-boundary-value problem for a first order semi-linear system are studied using iteration method. The positive solution and local solution with regard to different Lipschitz conditions of the right-hand terms are also discussed.

Keywords semi-linear systems, initial-boundary-value problem, stability, asymptotic behavior

* Department of Computer Science